

# REPORT DOCUMENTATION PAGE

Form Approved OMB No. 0704-0188

Public reporting burden for this collection of information is estimated to average 1 hour per response, including the time for reviewing instructions, searching existing data sources, gathering and maintaining the data needed, and completing and reviewing the collection of information. Send comments regarding this burden estimate or any other aspect of this collection of information, including suggestions for reducing this burden to Washington Headquarters Services, Directorate for Information Operations and Reports, 1215 Jefferson Davis Highway, Suite 1204, Arlington, VA 22202-4302, and to the Office of Management and Budget, Paperwork Reduction Project (0704-0188), Washington, DC 20503.

1. AGENCY USE ONLY (Leave blank)			2. REPORT DATE 2000	3. REPORT TYPE AND DATES COVERED Dissertation	
4. TITLE AND SUBTITLE  Synthese von Gerafduehringen mit ebenen Viergelenkgetrieben  Synthesis of Crosshead Guides with Even Four-Bar Mechanisms			5. FUNDING NUMBERS		
6. AUTHOR(S)  Volker Gassmann					
7. PERFORMING ORGANIZATION NAME(S) AND ADDRESS(ES)  Fachbereich Maschinenbau Universitaet der Bundeswehr Hamburg					
9. SPONSORING/MONITORING AGENCY NAME(S) AND ADDRESS(ES)			10. SPONSORING/MONITORING AGENCY REPORT NUMBER		
11. SUPPLEMENTARY NOTES  Text in German. Title and abstract in German and English, 93 pages.					
12a. DISTRIBUTION/AVAILABILITY STATEMENT  Distribution A: Public Release.			12b. DISTRIBUTION CODE		
ABSTRACT (Maximum 200 words)  The study treats the historical development of the synthesis process, then ultimately produces suggestions as to which characteristic values are the most significant for which tasks, and what sort of secondary sources would be relevant thereto. Due to the preponderance of synthesis methods, the author concludes that no one core principle can be pedestalized. The results from the study broach in particular the selection of Chebyshev crosshead guides and the crosshead guides with unending adjacent points and yielding of frame positions. The most important outcome is nevertheless the demonstration of the existence of Chebyshev crosshead guides with unsymmetrical coupler curves.					
14. SUBJECT TERMS  German, UNIBW, Synthesis, Crosshead guides, Coupler curves, Chebyshev crosshead guides, Four-bar mechanisms			15. NUMBER OF PAGES		
			16. PRICE CODE		
17. SECURITY CLASSIFICATION OF REPORT  UNCLASSIFIED	18. SECURITY CLASSIFICATION OF THIS PAGE  UNCLASSIFIED	19. SECURITY CLASSIFICATION OF ABSTRACT  UNCLASSIFIED	20. LIMITATION OF ABSTRACT  UL		

NSN 7540-01-280-5500

Standard Form 298 (Rev. 2-89)  
Prescribed by ANSI Std. Z39-18  
298-102

20021119 041

---

# **Synthese von Geradführungen mit ebenen Viergelenkgetrieben**

Vom Fachbereich Maschinenbau  
der Universität der Bundeswehr Hamburg  
zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktor-Ingenieurs  
genehmigte

Dissertation

vorgelegt von

**Diplom-Mathematiker Volker Gassmann**  
aus Hamburg

Hamburg 2000

**DISTRIBUTION STATEMENT A:**  
Approved for Public Release -  
Distribution Unlimited

# **Synthese von Geradführungen mit ebenen Viergelenkgetrieben**

Vom Fachbereich Maschinenbau  
der Universität der Bundeswehr Hamburg  
zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigte

Dissertation

vorgelegt von

**Diplom-Mathematiker Volker Gassmann**  
aus Hamburg

Copies Furnished to DTIC  
Reproduced From  
Bound Originals

Hamburg 2000

AQ F03-02-0237

Referent: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Wolfram Funk

Korreferent: Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Hans-Jürgen Seifert

Mündliche Prüfung: 20. August 1999

### **Vorwort**

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1991 bis 1995 im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Konstruktions- und Fertigungstechnik, Fachgebiet Maschinenelemente und Getriebetechnik der Universität der Bundeswehr Hamburg und 1996 bis 1999 während meiner Tätigkeit für die CIS Grafik und Bildverarbeitung GmbH.

Mein besonderer Dank gilt an erster Stelle dem Leiter des Fachgebiets, Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Funk, der die Arbeit wissenschaftlich betreut und gefördert hat. Seine Unterstützung und erfahrenen Ratschläge, nicht nur im fachlichen Bereich, waren stets eine große Hilfe.

Herrn Prof. Dr. rer. nat. H.-J. Seifert, Professur für Mathematik an der Universität der Bundeswehr, danke ich für die bereitwillige Übernahme des Korreferats.

Weiterhin gilt mein Dank allen Mitarbeitern des Instituts und Frau K. Blume im Sekretariat für ihre stete Hilfsbereitschaft. Besonders hervorheben möchte ich dabei Herrn Dipl.-Math. P. Tolle und Herrn Ing. (grad.) H. Dechow.

Essen, im Juli 2000

Für Anne und Martin

## Inhalt

<b>0</b>	<b>Verzeichnis der Abkürzungen und Bezeichnungen .....</b>	vii
<b>1</b>	<b>Einleitung .....</b>	1
1.1	Historischer Überblick.....	1
1.2	Prinziplösungen und Stand der Forschung.....	2
1.2.1	Analytische Syntheseverfahren .....	5
1.2.2	Numerische Syntheseverfahren .....	6
1.2.3	Geradführung einer Ebene.....	7
1.2.4	Zusätzliche Übertragungsaufgaben .....	8
1.3	Zielsetzung .....	9
<b>2</b>	<b>Anwendungsbeispiele von Geradführungen .....</b>	11
2.1	Wippkran .....	11
2.2	Schreitmaschinen .....	12
2.3	Bearbeitung von Werkstücken auf einem Förderband .....	14
2.4	Übernahme von Werkstücken von einem Förderband .....	16
2.5	Einschub eines Werkzeugs in ein enges Rohr .....	17
2.6	Weitere typische Anwendungen.....	19
<b>3</b>	<b>Kennwerte für Geradführungen .....</b>	22
3.1	Programmierumgebung .....	22
3.2	Bezeichnungen und Definitionen .....	23
3.3	Systematik .....	26
3.4	Getriebetechnische Unterprogramme .....	32
3.5	Mathematische Unterprogramme .....	33
3.6	Aufbau der Programme zur Berechnung der Kennwerte .....	34
3.7	Benennung und Kennwertkatalog .....	35
3.8	Vergleich unterschiedlicher Getriebe .....	38
3.8.1	Bestimmung des Geradführungsbereichs .....	38
3.8.2	Vorgabe eines beliebigen Kennwertes .....	39
3.8.3	Optimierung geometrischer Kennwerte bei variabler GF-Richtung.....	40
3.9	Auswahl von Prinziplösungen und Kennwerten .....	42

<b>4</b>	<b>Symmetrische Geradführungen mit Viergelenkgetrieben .....</b>	<b>44</b>
4.1	Systematik .....	44
4.2	Algebraische Syntheseverfahren .....	45
4.3	Numerische Synthese von symmetrischen Geradführungen.....	49
4.3.1	Optimalität von Tschebyscheff-Geradführungen.....	51
4.3.2	Parallelgeradführungen .....	53
<b>5</b>	<b>Geradführungen mit unendlich-benachbarten Punkten.....</b>	<b>58</b>
5.1.	Grundlagen .....	59
5.2.	Zusätzliche Vorgaben.....	68
<b>6</b>	<b>Klassische Syntheseverfahren .....</b>	<b>73</b>
<b>7</b>	<b>Nichtsymmetrische Tschebyscheff-Geradführungen.....</b>	<b>79</b>
7.1	Herleitung der Synthesegleichungen.....	79
7.2	Erläuterung des Einbettungsverfahrens.....	81
7.3	Anwendung des Einbettungsverfahrens .....	83
7.4	Vergleich mit anderen Geradführungen .....	88
7.5	Vorgabe von Kennwerten.....	90
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick .....</b>	<b>91</b>
<b>9</b>	<b>Literaturverzeichnis.....</b>	<b>94</b>

## 0 Verzeichnis der Abkürzungen und Bezeichnungen

$A_0$	Gestellpunkt des Antriebs
$B_0$	Gestellpunkt des Abtriebs
$A$	Gelenkpunkt des Antriebs
$B$	Gelenkpunkt des Abtriebs
$\overline{A_0A}$	Antrieb
$\overline{B_0B}$	Abtrieb
$K$	Koppelpunkt
$\overline{AB}$	Koppel
$\kappa$	Winkel im Koppeldreieck KAB
$\varphi$	Antriebswinkel
$t$	Parametrisierung der Koppelkurve
$t_0$	Anfang des Geradführungsbereichs
$t_1$	Ende des Geradführungsbereichs
$K(t) = (x(t), y(t))$	Koordinaten des Koppelpunkts in Abhängigkeit von $t$
$k$	Koppelkurve
$\rho(t)$	Winkel zwischen Koppel und x-Achse
$\alpha(t)$	Winkel zwischen Koppelkurve und x-Achse
$\delta_x(t)$	x-Abstand zwischen geradlinig gleichförmiger Vergleichsbewegung und Koppelpunkt
$\delta_{xy}(t)$	Euklidischer Abstand zwischen geradlinig gleichförmiger Vergleichsbewegung und Koppelpunkt
$\alpha_0, \alpha_1$	Ein- und Austrittswinkel der Koppelkurve aus dem Geradführungsabschnitt
$\alpha_{\max}$	maximaler Winkel zwischen Koppelkurve und Geradführungsstrecke
$a^+$	maximale Querbeschleunigung

## Kennwerte

$\varphi_g$	Winkelbereich des Antriebes während der Geradführung
$\varphi_0$	Winkel des Antriebes am Anfang der Geradführung
$\varphi_1$	Winkel des Antriebes am Ende der Geradführung
$q$	Geradführungsgüte
$d$	Dicke der Koppelkurve (bezogen auf die Geradführungslänge)
$b$	Breite der Koppelkurve (bezogen auf die Geradführungslänge)
$\bar{\rho}$	Drehwinkel der Koppel im GF-Bereich
$L$	Geradführungslänge

$\mu_{\min}^o$	Minimaler Kraftangriffswinkel
$\bar{\mu}_{\min}$	Minimaler Kraftangriffswinkel im GF-Bereich
$\delta_v^* = (v^+ - v^-)/\bar{v}$	Ungleichmäßigkeitgrad der Geschwindigkeit bezogen auf die
$\delta_v = (v^+ - v^-)/(v^+ + v^-)$	Durchschnittsgeschwindigkeit bzw. mittlere Geschwindigkeit
$\Delta_x = \max(\delta_x(t))$	Maximaler x-Abstand des Koppelpunktes vom gleichmäßig bewegtem Punkt
$\Delta_{xy} = \max(\delta_{xy}(t))$	Maximaler euklidischer Abstand des Koppelpunktes vom gleichmäßig bewegtem Punkt

## Geradführungscharakteristiken

PPPP	Vier unendlich benachbarte Punkte
PPPPP	Fünf unendlich benachbarte Punkte
PPPP-P	Vier unendlich benachbarte Punkte und ein endlich benachbarter Punkt

## Theorie von Euler-Savary

$\alpha_a, \alpha_b, \alpha_l$	Winkel von PA, PB und PP <sub>1</sub> im (t,n)-System
$\alpha_{a0}, \alpha_{b0}, \alpha_{l0}$	Winkel von PA, PB und PP <sub>1</sub> im (x,y)-System
P	Momentanpol
K <sub>b</sub>	Gangpolbahn
K <sub>r</sub>	Rastpolbahn
E <sub>t</sub>	Rastsystem
t	Polbahntangente
n	Polbahnnormale
E <sub>g</sub>	Gangebene
p	Krümmungsradius
p'	Ableitung vom Krümmungsradius nach s
$\sigma$	Verschiebung von P
r	Polstrahl
(P, r, $\alpha$ )	Polarkoordinatensystem
D	Durchmesser des Wendekreises
S	Hauptwendepol
R	Radius der Gangpolbahn
w <sub>1</sub>	Vorgegebener GF-Winkel
$\lambda$	Winkel zwischen der t-Achse und der x-Achse
T	Verschiebung des Pols P auf der Normalen von w <sub>1</sub>

# 1 Einleitung

## 1.1 Historischer Überblick

Die konstruktive Aufgabe, einen Punkt oder eine Ebene zumindest über ein gewisses Stück seiner Bahn gerade zu führen, ohne diesen Abschnitt in Form einer Gleitschiene oder ähnlichem real ausgebildet zu haben, taucht in vielen technischen Gebieten auf. Daher haben Geradführungsgtriebe im Laufe der Technikgeschichte vielfache praktische Anwendung und ein reges theoretisches Interesse gefunden:

Beispielsweise verwendete James Watt zur Führung des Kolbens seiner Dampfmaschine (Bild 1.1) eine Totalschwinge, deren Koppelpunkt die Koppelkurve genau halbiert und eine 8-förmige Koppelkurve mit zwei annähernd geradlinigen Abschnitten erzeugt (Bild 1.2a). Es gelang ihm, die Abmessungen dieses Getriebes so zu wählen, daß die Abweichung der Koppelkurve von den gegebenen Geraden im verwendeten Bewegungsabschnitt kleiner war, als die damals erzielbaren Fertigungsgenauigkeiten. Im Vergleich zur bis dahin verwendeten Gleitschiene konnte so die Reibung entscheidend vermindert und die prinzipiell bereits bekannte Kolbendampfmaschine erstmals wirtschaftlich verwendet werden.

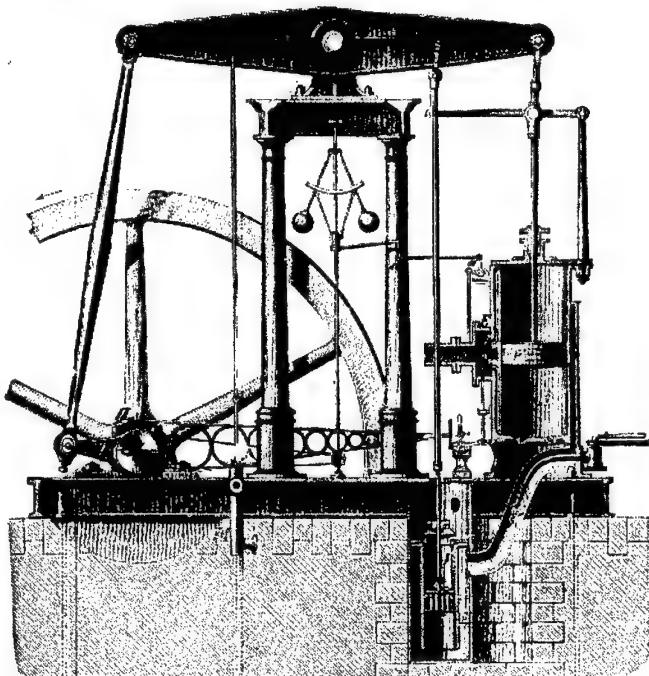
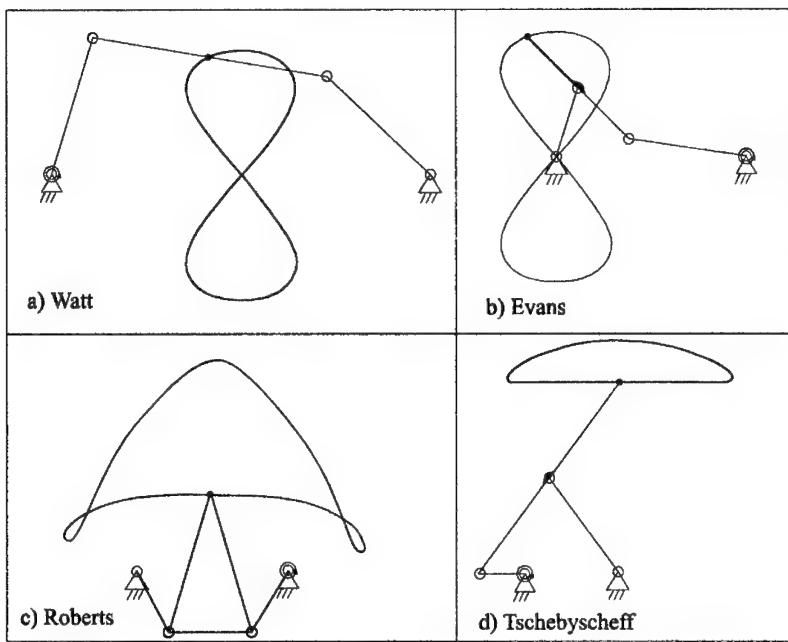


Bild 1.1: Kolbendampfmaschine von Watt [BE77, Fig. 506]

Theoretische Untersuchungen gingen einerseits von der Betrachtung endlich benachbarter Lagen auf einer Geraden aus (Burmestersche Lagentheorie, Punktlagenreduktion) oder untersuchten die lokale Gestalt von Koppelkurven (Gleichung von Euler-Savary, Ballscher Punkt, unendlich benachbarte Lagen). Ferner begründete Tschebyscheff nach einem Forschungsaufenthalt in Frankreich und England und dem Studium der Geradführungsgetriebe von Watt und anderen in Museen und Fabriken die mathematische Approximationstheorie.



**Bild 1.2:** Klassische Geradführungen von Watt, Evans, Roberts und Tschebyscheff

## 1.2 Prinziplösungen und Stand der Forschung

Bild 1.3 zeigt sowohl mögliche Getriebetypen für Geradführungsaufgaben, als auch mögliche Syntheseverfahren. Die in der vorliegenden Arbeit genauer untersuchten Verfahren sind grau unterlegt.

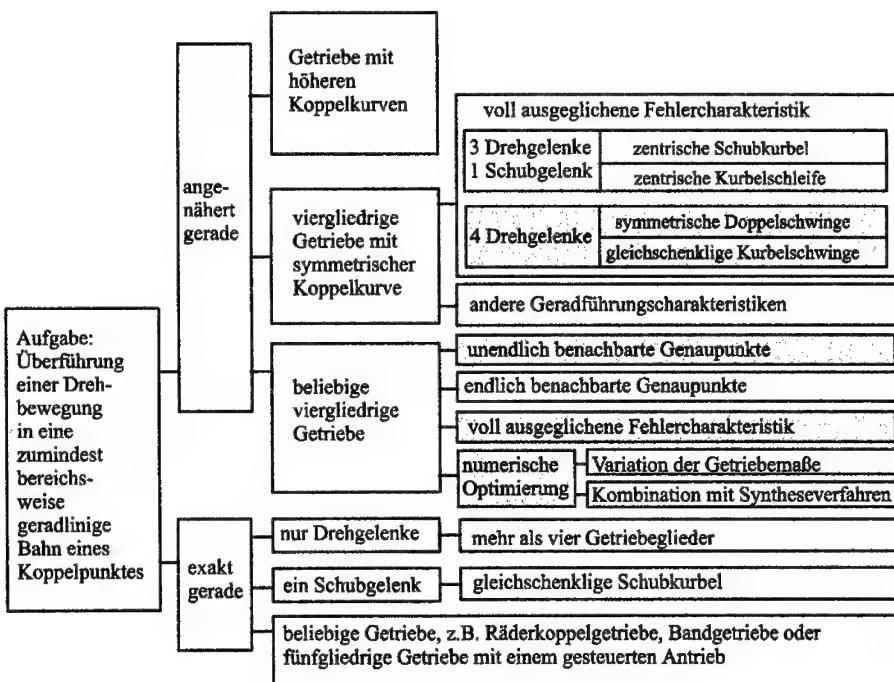


Bild 1.3: Prinziplösungen für Geradführung eines Punktes (nach [Fu94])

Das Bild zeigt, daß exakte Geradführungen mit Gelenkgetrieben ohne Schubglieder nur mit höhergliedrigeren Getrieben zu erzielen sind. Allerdings sind Koppelkurven von Gelenkgetrieben, die in einem Bereich der Koppelkurve eine exakte Gerade darstellen, jedoch auch Punkte außerhalb dieser Kurve durchlaufen, aus mathematischen Gründen nur bei zerfallenden Koppelkurven, etwa bei durchschlagenden Getrieben, möglich<sup>1</sup>. Solche Getriebe haben jedoch in der Regel ungünstige dynamische Eigenschaften und erfordern zusätzliche konstruktive Elemente zur Sicherung des Zwangslaufes. Kurvengetriebe, Räderkoppelgetriebe oder Bandgetriebe, deren Koppelkurven keinen solchen mathematischen Einschränkungen unterworfen sind, sind teurer und konstruktiv aufwendiger. Andererseits erfordern die meisten der in der Praxis auftretenden Geradführungsaufgaben eine Koppelkurve in D-ähnlicher Form, die zyklisch durchlaufen wird (vergleiche Kapitel 2). Wegen dem oben gesagten können Drehgelenkgetriebe solche Kurven nicht exakt erzeugen, müssen sie also approximieren.

<sup>1</sup> Koppelkurven von Gelenkgetrieben sind algebraische Kurven und zerfallen in irreduzible Komponenten. Wenn darunter eine Gerade ist, so müssen aus Gradgründen weitere Teile existieren.

Neben den hier untersuchten Viergelenkgetrieben erscheint insbesondere die Verwendung sechsgliedriger Getriebe mit höherer Koppelkurve (also das Watt-1 Getriebe oder Getriebe der Stephenson-Kette) sinnvoll: Mit ihnen lassen sich einerseits höhere Genauigkeiten als mit viergliedrigen Getrieben erzielen, und durch ihre große Formenvielfalt können ggf. leichter zusätzliche Funktionen außerhalb des Geradführungsreichs ausgeführt werden. Sechsgliedrige Getriebe ohne höhere Koppelkurve können verwendet werden, wenn die Koppelkurve des viergliedrigen Getriebes die Führungsaufgabe, jedoch erst der zusätzliche Zweisitzlag die erforderliche Übertragungsfunktion (zeitlicher Durchlauf der Koppelkurve) erfüllt. Alternativ zum Zweisitzlag könnte jedoch auch ein gesteuerter Antrieb oder eine Kurvenscheibe zur Lösung der Übertragungsaufgabe verwendet werden. In jedem Fall aber zerfällt dann die Maßsynthese in die Synthese des Viergelenkgetriebes und die (in der Literatur ausführlich behandelte) Lösung einer Übertragungsaufgabe, während im Falle höherer Koppelkurven Syntheseverfahren für angenäherte Geradführungen kaum untersucht wurden. Ein Sonderfall ist der Antrieb durch einen Zweisitzlag in der Koppelkurve beispielsweise zum Antrieb eines Mähmessers (Bild 1.4). Bei diesem Stephenson-Zweistandgetriebe bestimmt das Glied CD eine höhere Koppelkurve, die jedoch nicht zur Punktführung genutzt wird. Die Übertragungsfunktion  $\phi \rightarrow x_K(\phi)$  lässt sich nicht durch ein Viergelenk erzeugen und wurde in der Literatur noch nicht untersucht.

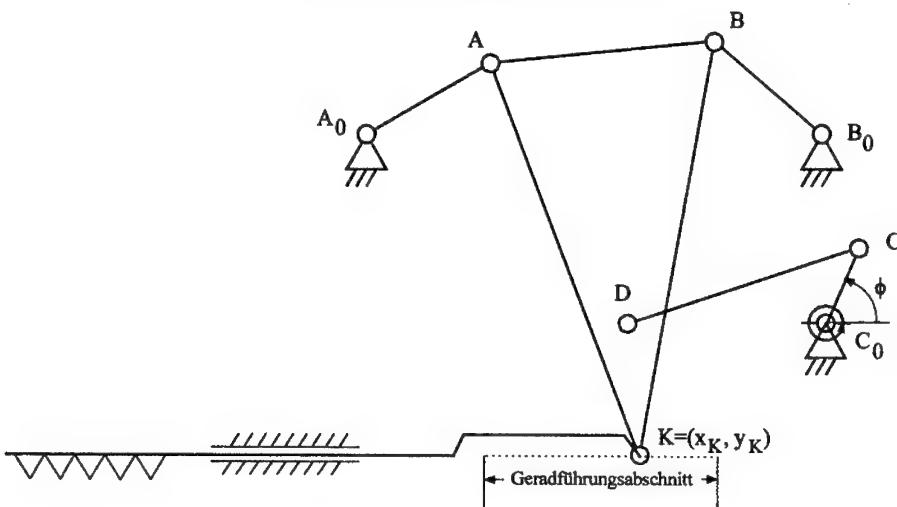


Bild 1.4: Antrieb eines Mähmessers nach [Lo86]

Bei der vorliegenden Aufgabe genügt es jedoch, den Punkt D fest zu wählen und die Bewegung von D während der Geradführung von K durch eine Gerade oder einen Kreis

---

anzunähern. Dadurch wird das Übertragungsproblem auf die Synthese einer Schubkurbel bzw. einer Kurbelschwinge mit gegebener Übertragungsfunktion reduziert.

Besondere Beachtung fanden in jüngerer Zeit auch fünfgliedrige Getriebe mit einem gesteuerten Antrieb. Mit solchen Getrieben können prinzipiell beliebige Koppelkurven erzeugt werden. Die zusätzliche Freiheit lässt sich aber auch nutzen, um Fertigungsfehler nach dem Messen der tatsächlichen Getriebemaße durch eine angepasste Verstellbewegung zu korrigieren [Ko94]. Ist es sogar möglich, im laufenden Betrieb die Bahnkurve zu bestimmen, so können durch eine adaptive Korrektur des zusätzlichen Antriebs Bahnabweichungen ausgeglichen oder zumindest deutlich verringert werden, deren Berechnung (Computersimulation) zu aufwendig ist, wie beispielsweise dynamische Auswirkungen des Gelenkspiels [BSch96]. In beiden Fällen ist es jedoch sinnvoll, zunächst ein Viergelenkgetriebe zu bestimmen, das die Bahnkurve möglichst gut annähert. Dann kann beispielsweise ein Gestellpunkt durch ein gesteuertes Schubgelenk ersetzt werden, welches aufgrund der vorhergehenden Optimierung des Viergelenks nur geringe Verstellbewegungen erfordert. Ansonsten sollten Geradführungsgetriebe mit mehr als vier Gliedern oder mit Kurvengelenken vor ihrem Einsatz einer genauen Toleranzanalyse unterzogen werden, denn die scheinbar gewonnene Genauigkeit kann durch Ungenauigkeiten der Gliederabmessungen und zusätzliches Lagerspiel wieder verloren gehen.

In der Literatur wurden Geradführungen durch viergliedrige Gelenkgetriebe besonders intensiv untersucht [z.B. Ih66, 76, 78, 91, TeWo60, 62, Ca57, Sto85, GaTo 88, Fu94]. Bei gleichschenkligen Schubkurbeln, die eine genaue Geradführung ermöglichen, führt diese immer durch einen Lagerpunkt, was von großem Nachteil sein kann. Geradführungen, die durch Getriebe mit Schubgelenken erzeugt werden, nennt man nach einem Vorschlag von Gierse [Gi94] **transponierte** Geradführungen. In vielen Fällen dient jedoch eine Geradführung gerade dazu, Schubgelenke zu vermeiden (Wattsche Dampfmaschine). In solchen Fällen spricht man von **komponierten** Geradführungen.

### 1.2.1 Analytische Syntheseverfahren

Soll die Aufgabenstellung, einen Punkt angenähert gerade zu führen, mit Hilfe viergliedriger Getriebe gelöst werden, so kann man bis zu sechs Punkte auf der zu approximierenden Geraden vorgeben und eine der allgemeingültigen Synthesemethoden für Punktlagen verwenden (endlich benachbarte Genaupunkte). Da dabei die Abweichung des zwischen den Genaupunkten liegenden Teils der Koppelkurve von der Geraden nicht berücksichtigt wird, müssen die Genaupunkte noch variiert werden, um gute oder optimale Geradführungen zu

erhalten (Kombination von Optimierung und Syntheseverfahren) [Lü92]. Eine gute lokale Approximation erhält man, indem man nicht endlich benachbarte, sondern unendlich benachbarte Lagen betrachtet. Zu einem Viergelenk in einer beliebigen Lage liefert der Ballsche Punkt als Koppelpunkt eine Koppelkurve, die in diesem Punkt eine vierpunktig berührende Tangente hat. Untersuchungen über die Eignung solcher Getriebe für Geradführungsaufgaben wurden u.a. von Meyer zur Capellen [Ca57], Ihme [Ih66, 76, 78, 91], Tesar und Wolford [TeWo60,62] durchgeführt. Für Sonderlagen des Gelenkvierecks konstruierte bereits Müller [Mü97, 98] Getriebe mit fünf- und sechspunktig berührender Tangente.

Besondere Aufmerksamkeit fanden auch Getriebe mit einer symmetrischen Koppelkurve, da diese einfacher zu untersuchen sind und sich die Symmetrie auch zur Erzeugung von Koppelkurven mit mehreren Geradführungsabschnitten einsetzen lässt. Letztere und Geradführungen mit Spitzen wurden insbesondere von Dijksman [D72] untersucht. Auch die von Tschebyscheff ermittelten Geradführungen mit vollständig ausgeglichener Fehlercharakteristik ([GaTo88], [STo85], [To89], [Wu56], [Vo79]) haben symmetrische Koppelkurven. Sie lassen sich als Kombination von endlich- und unendlich benachbarten Genaupunkten auffassen; für symmetrische Koppelkurven können die möglichen Kombinationen vollständig erfaßt werden.

Viele Untersuchungen beschreiben jedoch nur einzelne Beispiele von Mechanismen für spezielle Anwendungen. Andere liefern zwar ganze Serien von Geradführungen, beschreiben jedoch nur unzureichend, wie für eine konkrete Aufgabe das passende Getriebe ausgewählt werden kann.

### 1.2.2 Numerische Syntheseverfahren

Untersuchungen über die Verwendung numerischer Verfahren zur Synthese von Getrieben zur Erzeugung vorgegebener Koppelkurven lassen sich wie folgt gliedern:

- Es wird eine endliche Anzahl von Sollpunkten vorgegeben, die in vorgeschriebener Reihenfolge mit möglichst guter Näherung zu durchlaufen sind
- Die gesamte Kurve wird vorgegeben.

Im ersten Fall bleibt entweder der Kurvenverlauf zwischen den Sollpunkten unberücksichtigt, oder es muß eine sehr große Anzahl von Punkten betrachtet werden. Ferner führt die Notwendigkeit der Zuordnung der Sollpunkte zum jeweils dichtesten Punkt der Koppelkurve zu numerischen Problemen (schlechte Konvergenz).

Noch gravierender ist das Zuordnungsproblem im zweiten Fall: wenn kein zeitlicher Ablauf gegeben ist - der sofort eine entsprechende Zuordnung liefert - ist ein Abstand zwischen zwei Kurven nur schwer zu definieren (vgl. Kapitel 3). Durch die Betrachtung der Fourier-Reihe der Koppelkurve kann dieses Problem umgangen werden [Fu94, Sch95, BeSch96]: Die Fourier-Koeffizienten geben die Form einer Kurve wieder und sind invariant gegenüber Drehungen, Bewegungen und Maßstabsänderungen. Dies wird seit langem zur Umrißerkennung in der Bildverarbeitung ausgenutzt, indem die Fourierkoeffizienten bekannter Konturen in einer Datenbank gespeichert werden und mit denen der zu erkennenden Kontur verglichen werden. Bei Viergelenkgetrieben wird durch diese Invarianz die Anzahl der zu varierenden Getriebeparameter von 9 auf 5 reduziert. Nur dadurch ist die Erstellung eines elektronischen Koppelkurvenkatalogs möglich, der einerseits möglichst viele qualitativ verschiedene Koppelkurven enthält und andererseits in akzeptabler Zeit durchsucht werden kann. Allerdings werden bei dieser Methode alle Bereiche der Koppelkurve gleich gewichtet, und es können nur geschlossene Sollkurven betrachtet werden. Besonders bei Geradführungsaufgaben sind diese beiden Einschränkungen vielfach nicht akzeptabel, da hier eben in erster Linie der Geradführungsabschnitt der Koppelkurve entscheidend ist.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß bei allgemeinen numerischen Verfahren die besonderen algebraischen Eigenschaften von Koppelkurven einerseits und typische Anforderungen an Geradführungen andererseits nicht berücksichtigt werden.

### 1.2.3 Geradführung einer Ebene

Neben der Führung eines Punktes wird oft auch die Führung einer Ebene entlang einer Geraden verlangt (**Geradschiebung**). Dies ist eine translatorische Bewegung, d.h. eine Bewegung, bei der die Koppel keine Rotation ausführt und die mit viergliedrigen Getrieben ohne Schubgelenke nicht zu verwirklichen ist. Zur Ableitung einer solchen Bewegung aus einer Punktführung gibt es nach Vollmer [Vo79, S. 77,78] zwei einfache Lösungen:

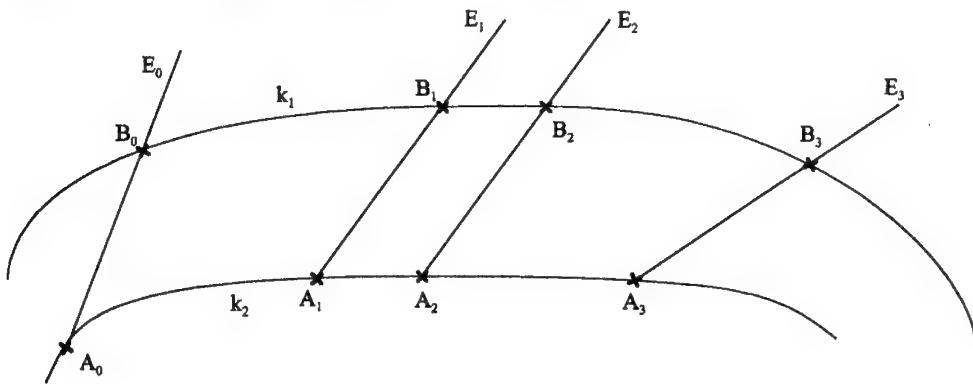
- die Verwendung eines weiteren, zum gegebenen Getriebe kongruenten Getriebes führt zu einem achtgliedrigen Getriebe (siehe auch Bild 2.7).
- durch die Anwendung des Satzes von Roberts auf das gegebene Getriebe findet man drei mögliche sechsgliedrige Getriebe mit der geforderten Parallelführung.

Bei der letzten Konstruktion muß insbesondere untersucht werden, ob sich die Bewegungsgüte (z.B. Kraftangriffswinkel) verschlechtert.

Schwieriger ist es, eine Ebene E nur zeitweise rein translatorisch zu bewegen, was für viele Geradführungsaufgaben sinnvoll sein kann (siehe Abschnitt 2). Wenn die Bewegungsaufgabe

sich nicht mit einem Viergelenk lösen läßt<sup>2</sup> kann zunächst eine geeignete Geradführung mit der Koppelkurve  $k_1$  für einen Punkt der Ebene ermittelt werden. Dann kann entweder ein zusätzlicher Mechanismus in der nach a) oder b) parallel geführten Ebene installiert werden (siehe wieder Bild 2.7), oder die Koppelebene wird durch eine weitere Koppelkurven  $k_2$  geführt Bild 1.5), deren Bahnkurve aus  $k_1$  und dem Rotationsanteil der Bewegung zeichnerisch ermittelt werden kann. Die Bewegung von Lage 1 in Lage 2 in Bild 1.5 ist eine Geradschiebung, da die Koppelkurve  $k_1$  zwischen den Punkten  $A_1$  und  $A_2$  näherungsweise parallel zu  $k_2$  zwischen den Punkten  $B_1$  und  $B_2$  verläuft. Nachteile dieser Partialsynthese sind:

- Der Antrieb des Getriebes ist problematisch: Werden beide Koppelkurven angetrieben, so ist das Getriebe übergeschlossen; wird nur eine Koppelkurve angetrieben, so muß die Bewegungsübertragung auf das andere Getriebe untersucht werden.
- ein zweites Führungsgetriebe für  $k_2$  muß ermittelt werden.



**Bild 1.5:** zeitweise translatorische Führung der Ebene E durch die Koppelkurven  $k_1$  und  $k_2$

#### 1.2.4 Zusätzliche Übertragungsaufgaben

Hier können folgende Fälle unterschieden werden:

- Antriebswinkelzuordnungen oder Geschwindigkeitsvorgaben nur in einzelnen Punkten (siehe Beispiel 2.4),
- kontinuierliche Übertragungsaufgabe (siehe Beispiel 2.3).

<sup>2</sup>Beispielsweise wird in der Regel die Vorgabe von 5 Lagen eines Viergelenks nicht gleichzeitig eine ausreichende Geradführungsgüte und die angestrebte Bewegung im übrigen Teil der Koppelkurve bewirken.

<sup>3</sup> Sonst kann an mindestens einem Punkt das zweite Getriebe nicht durch die Ebene E angetrieben werden. Dies folgt durch Anwendung des Zwischenwertsatzes auf den Winkel zwischen E und der zweiten Koppelkurve. Zum Antrieb eines Getriebes in der Koppelkurve siehe auch Abschnitt 3.

Besonders für den zweiten Fall sind in der Regel zusätzliche Getriebe (Kurvenscheiben, Doppelkurbel) oder gesteuerte Antriebe erforderlich. Trotzdem ist es oft sinnvoll, bereits das Führungsgetriebe möglichst gut an die Übertragungsaufgabe anzupassen, beispielsweise um die erforderliche Leistung eines Servomotors klein zu halten. Die Aufstellung der Übertragungsaufgabe weist in jedem Fall große Ähnlichkeit zur Synthese einer Kurvenscheibe mit Stöbel auf, daher können Bewegungsabläufe mit kleinen Extremwerten für Geschwindigkeit und Beschleunigung mit Hilfe der entsprechenden Syntheseverfahren ermittelt werden.

### 1.3 Zielsetzung

Trotz oder möglicherweise gerade infolge der großen Anzahl verfügbarer Syntheseverfahren sind jedoch wegen fehlender allgemeinverständlicher Entwurfsunterlagen und Auswahlkriterien Gelenkgetriebe in vielen Anwendungsgebieten von Geradführungsaufgaben durch lineare Führungsgetriebe oder Getriebe mit mehreren Antrieben verdrängt worden, obwohl sie oftmals eine diskutable Lösungsalternative darstellen. Ihre wichtigsten Vorteile gegenüber anderen Lösungsmöglichkeiten sind:

- kostengünstige Produktion,
- geringere bewegte Massen,
- hohe Belastungen sind möglich,
- keine Kollisionsgefahr bei Ausfall von Steuerungen (beispielsweise kann aus Sicherheitsgründen der Einsatz von fünfgliedrigen Getrieben mit zwei Antrieben unzweckmäßig sein),
- geräusch- und schwingungsarme Gestaltung ist möglich,
- lange Lebensdauer.

Ob die Auswahl eines Getriebes nun aus einer Tabelle einzelner Getriebe, aus einer durch mehrere Parameter gegebenen unendlichen Serie guter Geradführungen oder durch numerische Verfahren erfolgt, in jedem Fall sind zur Maßsynthese Kennwerte erforderlich, die entweder dem Konstrukteur direkt die Auswahl eines Getriebes ermöglichen oder die Vorgabe einer Zielfunktion erleichtern. Je nach Anwendungszweck des Getriebes ermöglichen nämlich erst Kennwerte den quantitativen Vergleich der Eignung unterschiedlicher Getriebe. Daher wurde eine Tabelle der für Geradführungsaufgaben erforderlichen Kennwerte aufgestellt. Sodann werden die zu ihrer Ermittlung erforderlichen Programme entwickelt.

---

Die bekannten Syntheseverfahren werden hinsichtlich ihrer Eignung zur Ermittlung von Geradführungen verglichen und neue Verfahren insbesondere zur Synthese von Geradführungen mit vorgegebenen Kennwerten bzw. zur Optimierung einzelner Kennwerte werden entwickelt. Besonders eingehend werden dabei die Geradführungsgüte, d.h. die maximale Abweichung der Koppelkurve von der zu approximierenden Geraden im Verhältnis zur Geradführungslänge sowie die Vorgabe von Platzbedarf und Gestellpunkten untersucht.

Durch Integration der erarbeiteten Verfahren in ein CAD-System wird die direkte Eingabe konstruktiver Randbedingungen ermöglicht, indem etwa einzelne Maße aus vorliegenden Konstruktionen übernommen werden oder ein gegebenes Gehäuse als Gebiet identifiziert wird, in welchem das Getriebe Platz finden soll. Diese Vorgehensweise bietet weiterhin den Vorteil, daß die Ergebnisse, d.h. die synthetisierten Getriebe, ohne Datenübertragungen weiterbearbeitet werden können. Die entwickelten Programme sind modular aufgebaut, so daß die Berechnungsprogramme auch selbstständig genutzt werden können.

Ferner werden Regeln vorgestellt, die den Konstrukteur in die Lage versetzen, auch ohne profunde Kenntnisse bzw. intensive Einarbeitung in die Getriebetechnik oder die Anwendung von Optimierungsverfahren zu beurteilen, ob und wie die in der Praxis auftretenden Geradführungsaufgaben sich durch Gelenkgetriebe lösen lassen. Diese Regeln dienen

- der Struktursynthese
- der Auswahl geeigneter Kennwerte
- der Auswahl jeweils geeigneter Syntheseverfahren.

---

## 2 Anwendungsbeispiele von Geradführungen

Im Folgenden werden einige Anwendungen von Geradführungen beschrieben. Aus der Art der Anwendung ergeben sich dann jeweils die zur Erfüllung der technischen Funktion erforderlichen Eigenschaften der Koppelkurve und des Getriebes. Im nächsten Kapitel wird dann die Liste dieser Anforderungen systematisiert und vervollständigt, so daß ein Kennwertkatalog für Geradführungsaufgaben resultiert.

### 2.1 Wippkran

Bild 2.1 zeigt einen Wippkran [Vol79]. Das verwendete Viergelenk mit der vollständigen Koppelkurve ist in Bild 2.2 dargestellt. Aufgabe der Viergelenkgeradführung ist die horizontale Bewegung einer schweren Last. Die anderen Bewegungen werden durch das Seil bzw. die Drehung des Krans verwirklicht.

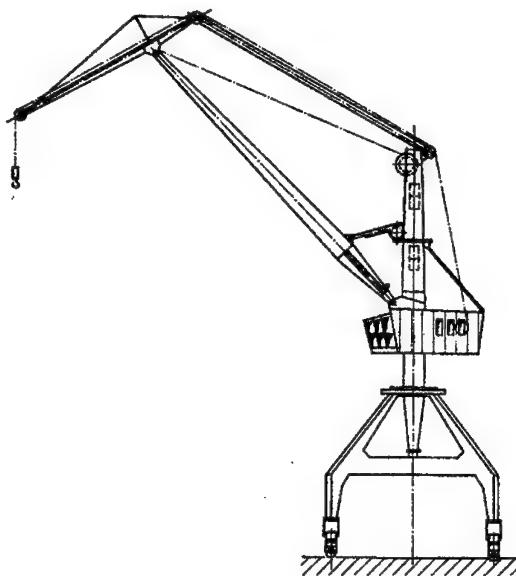
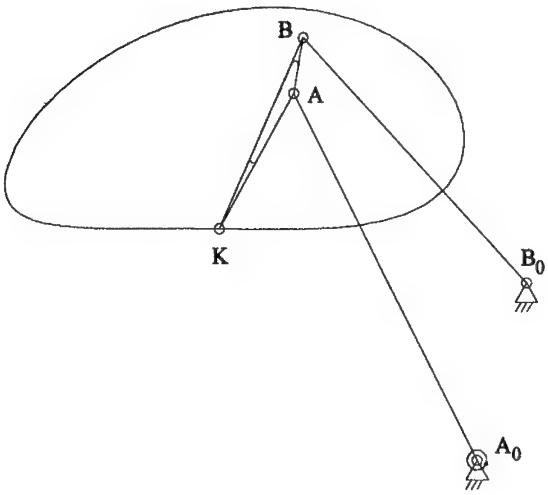


Bild 2.1: Wippkran



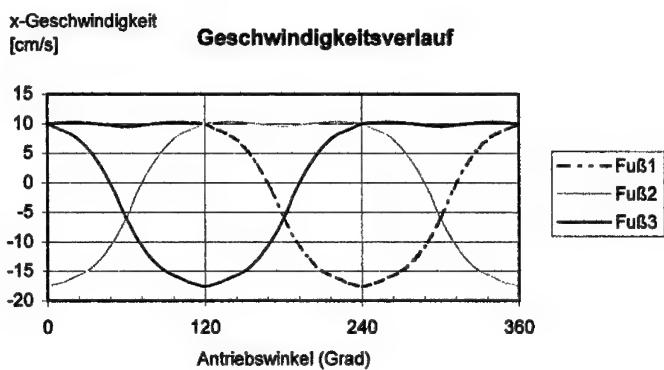
**Bild 2.2:** vollständige Koppelkurve der Wippkran-Geradführung

Nur ein Teil der gesamten Koppelkurve ist Geradführung und wird für die Bewegung ausgenutzt (Bild 2.2). Durch die Reichweite des Krans ist die Länge der Geradführung gegeben. Die Höhe des Krans und die Lage des Führerhauses schränken die Wahl der Gestellpunkte A<sub>0</sub> und B<sub>0</sub> ein. Da die Last relativ langsam bewegt wird, ist keine dynamische Analyse erforderlich. Wenn die Last im Verhältnis zu den bewegten Getriebegliedern sehr schwer ist oder durch geeignete Wahl von Masse und Schwerpunkten erreicht wird, daß sich die Summe der potentiellen Energie dieser Glieder bei der Bewegung des Viergelenks im Geradführungsreich nur wenig ändert, so ist der Winkel zwischen der Koppelkurve und der Horizontalen für die Kraftübertragung entscheidend. Bei horizontaler Tangente der Koppelkurve ist dann keine zusätzliche Kraft zur Bewegung der Last erforderlich.

## 2.2 Schreitmaschinen

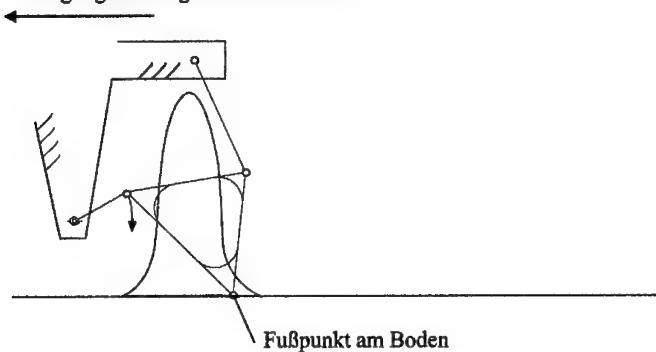
Bei Schreitmaschinen kann die Bewegung der Beine durch D-förmige Geradführungen erzeugt werden [Ko94]. Da das Abrollen eines Fußes - entsprechend dem menschlichen Gang - nur schwer zu realisieren ist und die Bewegung der Kabine (getriebetechnisch ist diese das Gestell) möglichst gleichmäßig erfolgen soll, ist eine Geradschiebung erforderlich. Ferner wird ein Bein aus mehreren Fußpunkten bestehen, mindestens jedoch aus drei, da 3 Punkte eine Ebene bestimmen. Während der Koppelpunkt die Geradführung durchläuft, berührt ein Bein den Boden und bewegt sich nicht vorwärts. Statt dessen bewegt sich der übrige

Mechanismus voran. Wenn der Koppelpunkt die Geradführung beendet, hebt sich das Bein, und ein weiteres Bein übernimmt die Fortbewegung. Soll ein kurbelnder Antrieb verwendet werden, so sind daher mehrere gleichartige Getriebe zu verwenden, die zeitlich versetzt die n Beine bewegen. Der Winkelbereich des Antriebs, für den der Koppelpunkt die Geradführung durchläuft, muß dazu offenbar  $360^\circ/n$  betragen. Ein geringer Energieverbrauch und gleichmäßige Bewegung wird dann erreicht, wenn einerseits der Schwerpunkt der Maschine möglichst konstant ist: dann muß keine Arbeit zum Heben und Senken geleistet werden. Also sollte die Geradführungsgüte (exakte Definition siehe Kapitel 3) möglichst hoch sein. Andererseits sollte die horizontale Geschwindigkeit des Koppelpunktes im Geradführungsbereich möglichst gleichmäßig sein. Noch genauer müssen jedoch die horizontalen Komponenten von Anfangs- und Endgeschwindigkeit übereinstimmen, damit bei Wechsel des Standbeins keine Geschwindigkeitssprünge auftreten. Um wenigstens leichte Unebenheiten zu meistern und Stolpern zu vermeiden, müssen die Beine möglichst senkrecht und schnell angehoben werden. Daraus resultieren Anforderungen an die Geschwindigkeitskomponenten des Koppelpunkts in horizontaler und vertikaler Richtung auch außerhalb des Geradführungsbereichs. Einen möglichen Verlauf der horizontalen Geschwindigkeitskomponente für  $n=3$  zeigt Bild 2.3.



**Bild 2.3:** Geschwindigkeitsverlauf für möglichst gleichmäßige Vorwärtsbewegung der Schreitmaschine mit  $v=10 \text{ m/s}$  für  $\varphi_g = 360^\circ/n = 120^\circ$ . Wechsel des Standbeins bei  $0^\circ$ ,  $120^\circ$  und  $240^\circ$ .

**Bewegungsrichtung der Schreitmaschine**



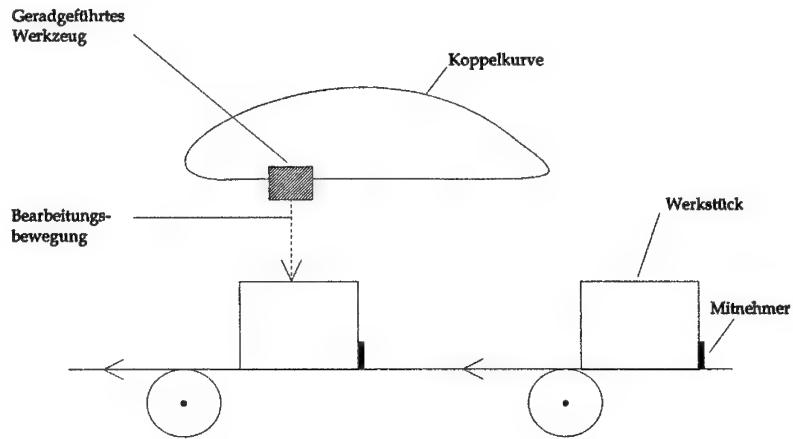
**Bild 2.4: Koppelkurven für Schreitmaschinen**

Die bisher aufgeführten Eigenschaften lassen sich durch entsprechende Kennwerte leicht quantifizieren. Im vorliegenden Fall wird jedoch deutlich, daß auch qualitative Anforderungen für die Form der Koppelkurve und die Lage des Gestells bestehen: Die Beine und alle bewegten Teile dürfen während der Bewegung nicht in den Boden stoßen. Sollen Konstruktionen mit kleiner Masse verwendet werden, so bedeutet dies, wie in [Ko94] genauer ausgeführt wird, daß die Gestellpunkte und die bewegten Glieder in jeder Stellung auf der bauchigen Seite der Koppelkurve liegen müssen. Es kommen also nur Getriebe wie in Bild 2.4 in Frage; beim Viergelenk für den Wippkran liegen beide Gestellpunkte unterhalb der Geradführung, also im für die Schreitmaschine unzulässigen Bereich.

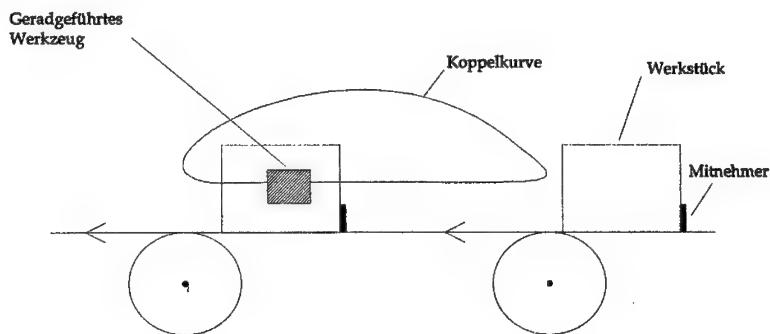
### 2.3 Bearbeitung von Werkstücken auf einem Förderband

Zur Zeiter sparnis sollen Werkstücke bearbeitet werden, während sie durch ein Förderband mit konstanter Geschwindigkeit bewegt werden. Beispielsweise könnte eine Etikette aufgeklebt werden, eine Bohrung erfolgen oder eine Getränkeflasche gefüllt werden. In den ersten beiden Fällen ist in der Regel eine Geradschiebung zur Führung des Werkzeugs notwendig, im dritten Fall ist u.U. eine Punktführung der Fülldüse oberhalb des Flaschenhalses ausreichend. Die Bewegung ist in einem vorgegebenen Takt durchzuführen. Um Kollisionen mit dem folgenden Werkstück zu vermeiden, ist auch hier eine D-förmige Koppelkurve erforderlich. Aus Kostengründen sollen Führungs- und Übertragungsaufgabe wenn möglich mit einem viergliedrigen Getriebe verwirklicht werden; es sollen also keine Kurvenscheibe oder ein vorgesetztes Viergelenk verwendet werden. Zur Beurteilung der Funktionsfähigkeit des Mechanismus ist die Relativbewegung von Werkstück und Koppelpunkt bzw. Werkzeug

entscheidend, also keineswegs nur eine möglichst konstante Geschwindigkeit, sondern auch eine geringe Beschleunigung und eine innerhalb einer gegebenen Toleranz liegende Lageabweichung. In der Regel wird die Bewegung des Werkzeugs entweder in der gleichen Ebene (Bild 2.5) wie die Koppelkurve oder senkrecht (Bild 2.6) zu dieser liegen. Diese Lage entscheidet über die Bedeutung der Geradführungskennwerte: Im ersten Fall beeinflußt die Abweichung der Koppelkurve von der Sollgeraden die Vorschubbewegung des Werkzeugs, im zweiten Fall kommt es bei der Bearbeitung zu einem Lagefehler.



**Bild 2.5:** Bearbeitung eines Werkstücks



**Bild 2.6:** Bearbeitungsrichtung senkrecht zur Zeichenebene

## 2.4 Übernahme von Werkstücken von einem Förderband

Hier sollen Werkstücke von einem Förderband übernommen werden, um dann eine vorgegebene Bewegung zur nächsten Bearbeitungsstufe auszuführen. Wiederum ist eine periodische Bewegung erforderlich. Zur Kollisionsvermeidung mit nachfolgenden Werkstücken kann entweder eine angenähert D-förmige Koppelkurve verwendet werden, oder aber eine sogenannte vollständige Geradführung mit einem zusätzlichen Mechanismus zum Umklappen des Schiebers (Bild 2.7). Die erforderliche Geradschiebung wird hier durch Verdoppelung (8-gliedriges Getriebe entsprechend Abschnitt 1.2.3, Lösung a) verwirklicht. Um eine übersichtlichere Darstellung zu erreichen, wurde jedoch nur eine der beiden kongruenten Koppelkurven eingezeichnet.

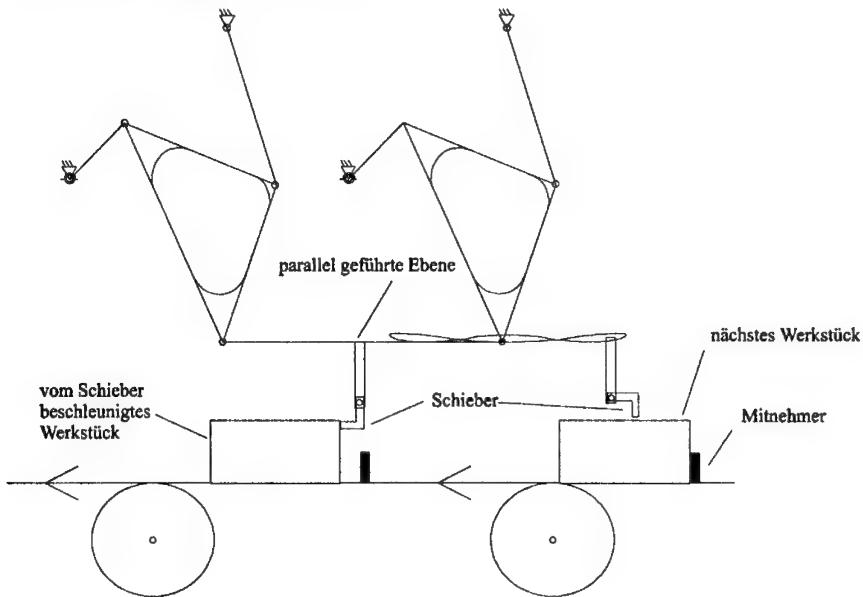


Bild 2.7: vollständige Geradschiebung

Wenn das Werkstück nicht geschoben, sondern gegriffen werden soll, ist auch eine Geradschiebung erforderlich. Zusätzlich müssen aber hier während des Greifens die Geschwindigkeiten von Band und Werkstück übereinstimmen.

Kann die Bewegung des Werkstücks weiterhin geradlinig erfolgen und beispielsweise durch eine Führungsschiene gesichert werden, so dient die Geradführung nur der Veränderung der

Geschwindigkeit und eine punkt- bzw. linienförmige Berührung des Werkstücks ist möglich.  
Dann ist keine Ebenenführung, sondern nur eine Punktführung notwendig.

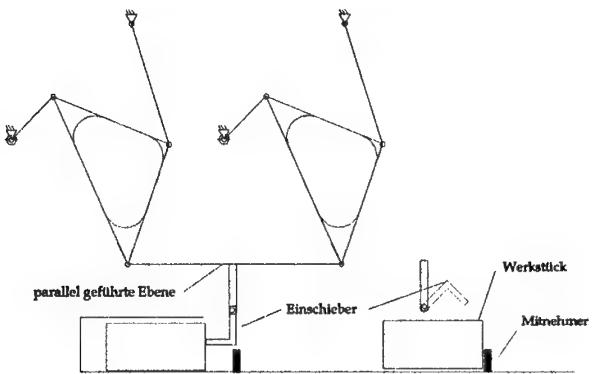
Wenn das Werkstück geschoben wird, ist zu beachten, daß insbesondere bei starkem Abbremsen wegen der Massenträgheit der Kontakt mit dem Schieber u.U. zusätzlich erzwungen werden muß. Eine länger andauernde, also geringere Beschleunigung erfordernde Verzögerung führt andererseits bei gegebenem Takt zu wesentlich größeren Beschleunigungen des Schiebers während der Rückwärtsbewegung, für den dann nur ein kleinerer Anteil der Gesamtzeit zur Verfügung steht. Ferner darf der Geschwindigkeitsunterschied (Stoß) bei der Übernahme nicht zu groß sein. Da der Grund für den Einsatz der (aufwendiger zu synthetisierenden) Viergelenkgeradführung bei solchen Aufgabenstellungen sehr oft eine Erhöhung der Drehzahl ist, sind hohe Geschwindigkeiten und Beschleunigungen oft unvermeidlich.

Es sind auch Anwendungen möglich, bei denen nicht beschleunigt, sondern gebremst werden soll: Ist im zweiten auszuführenden Bearbeitungsschritt die minimale Taktzeit der Maschine etwa doppelt so hoch, wie bei der ersten Maschine, so kann die Leistungsfähigkeit der ersten Maschine voll ausgeschöpft werden, indem der Materialfluß in 2 Ströme geteilt wird, die Werkstücke abgebremst werden und dann der zweifach auszuführenden zweiten Maschine übergeben werden. Beispielsweise sollen Papierbögen vor der Bearbeitung durch eine Falzmaschine abgebremst werden. Dabei ist zu beachten, daß das Papier sich nicht wellen darf. Dazu kann das Papier entweder an beiden Enden gegriffen werden, was für die Zuführung zur Falzmaschine unzweckmäßig sein kann, oder nur am hinteren Ende. Im letzteren Fall ist eine Geradschiebung zur Lösung der Bewegungsaufgabe nötig, denn der geradeführte - zusätzlich auszuführende - Greifmechanismus darf nicht rotieren. Bei diesem Lösungsprinzip ist keine zusätzliche Führung der Bögen erforderlich, da sie durch ihre Trägheit stets gestrafft werden. Eine gänzlich andere Lösung führt die Bögen in die Innenseite einer reibungsarmen Trommel. Eine Doppelkurbel, deren Gestellpunkt  $B_0$  auf der Mittelachse der Trommel liegt, und bei der der Greifmechanismus starr mit dem Abtrieb verbunden ist, reduziert die Bewegungsaufgabe auf ein einfaches Übertragungsproblem, führt jedoch zu einer in der Regel schlechteren Anordnung der aufeinanderfolgenden Maschinen.

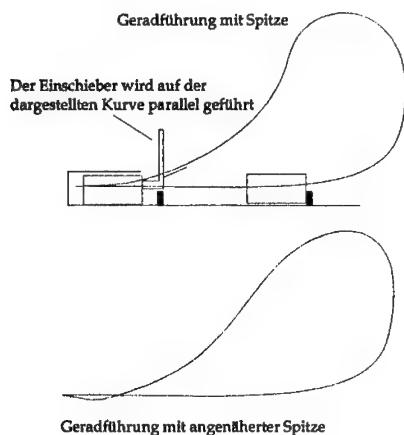
## 2.5 Einschub eines Werkzeugs in ein enges Rohr

Ein Werkzeug soll in ein enges Rohr geschoben werden oder auch ein Werkstück in ein Magazin (z.B. in Form eines rotierenden Revolvers). Auch hier kann die Prinziplösung aus Bild 2.7 gewählt werden (Bild 2.8). Durch Verwendung einer Geradführung mit Spitze kann

jedoch auf den Klappmechanismus verzichtet und so die Konstruktion bedeutend verbessert werden (Bild 2.9 obere Koppelkurve). Wenn genügend Spiel vorhanden ist, kann auch auf eine exakte Spitze verzichtet werden (Bild 2.9 untere Koppelkurve). Besteht der Schieber aus einem zusätzlichen Mechanismus, der ihn beim Rückweg anhebt, um die Kollision mit dem nachfolgenden Werkstück zu vermeiden, so kann auch eine vollständige Geradführung verwendet werden, also entweder eine exakte Geradführung mit höhergliedrigen Getrieben oder eine angenäherte Geradführung mit Viergelenkgetrieben, deren Koppelkurve vollständig für Geradführungszwecke genutzt werden kann [GaTo89].



**Bild 2.8:** Einschubmechanismus mit vollständiger Geradschiebung



**Bild 2.9:** Einschubmechanismus durch Geradschiebung mit Spitze

## 2.6 Weitere typische Anwendungen

- Malteserkreuzgetriebe werden vielfach in Filmschrittgetrieben von Filmprojektoren eingesetzt. Zum stoß- und ruckfreien Antrieb können Geradführungen mit zwei Geradführungsabschnitten verwendet werden, indem der Koppelpunkt der GF anstelle einer Kurbel in die Slitze des Malteserkreuzes eingreift. Der Winkel zwischen beiden Geradführungen ist der Schrittwinkel des Malteserkreuzes [Vo79, Di??].
- Führung einer Kreissäge [STo85, Di76]. Da nicht die gesamte Koppelkurve ausgenutzt wird, ist keine Ebenenführung notwendig, wenn der Drehwinkel der Koppel im Geradführungsbereich klein genug ist.

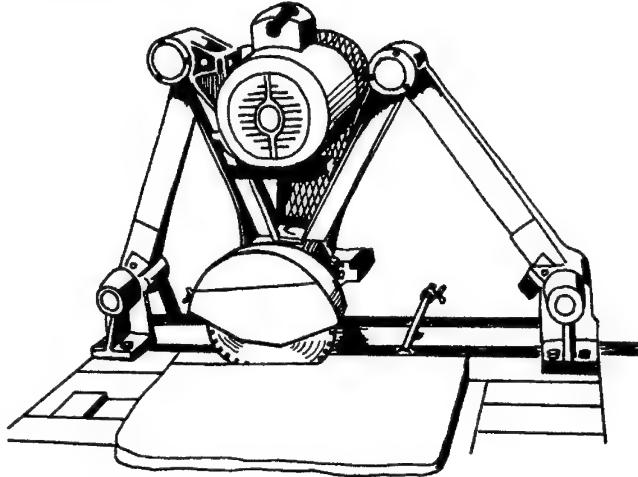


Bild 2.10: Führung einer Kreissäge [Di76]

- Mechanismen zum Lagefehlerausgleich beim automatischen Fügen [Sch94].
- Parallelgeradführung für Nadeln in Hochleistungsnähmaschinen [Vo89]
- Lagerung einer Achse (Bild 2.11)

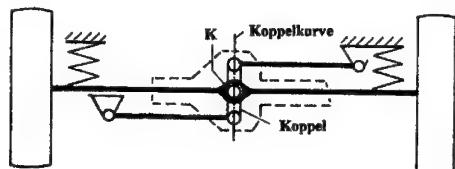


Bild 2.11: Lagerung einer Achse [nach Lo86]

- Umwandlung einer Drehbewegung in eine hin- und hergehende Bewegung (vollständige Geradführung), beispielsweise zum Antrieb einer Pumpe (Bild 2.12)

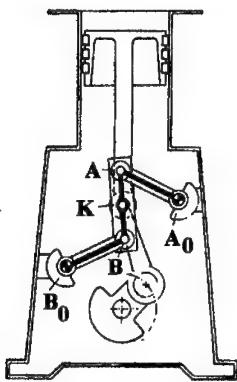


Bild 2.12: Antrieb einer Pumpe [nach Lo86]

Ferner ist zu beachten, daß die beschriebenen Aufgaben durchaus miteinander kombiniert werden können. Beispielsweise soll ein Werkstück zunächst von einem Förderband übernommen und dann in ein Magazin geschoben werden. Dies führt zu Geradführungen mit mehreren Geradführungsbereichen, für die jeweils unterschiedliche Kennwerte gelten: Die erforderliche Güte der ersten Geradführung ist durch die maximal zulässige Querbewegung des Greifers gegeben, die der zweiten Geradführung durch das Spiel zwischen dem Werkstück und dem Magazin.

Die Verwendung von Geradführungsgetrieben liegt bei Produktionsstätten mit vielen aufeinanderfolgenden Bearbeitungsschritten insofern nahe, als

- die Richtung des Materialflusses sich nicht ändert und daher weniger Energie aufzuwenden ist,
- die Anordnung der aufeinanderfolgenden Bearbeitungsstationen in einer Reihe vorteilhaft ist im Hinblick auf Konstruktion, Bedienung und Wartung.

im Vergleich zu anderen Lösungen. Ferner ist die geforderte Drehzahl insbesondere bei Verpackungsmaschinen oder Druckmaschinen oft zu hoch für Roboter.

Wichtig für die Auswahl der Kennwerte ist auch die Einteilung in aktive, d.h. an einem Glied des Führungsmechanismus angetriebene Geradführungsgetriebe und passive Geradführungen, die am geradeführten Punkt angetrieben werden. Beispielsweise spielen Umlauftähigkeit, Geschwindigkeitsverlauf und Übertragungswinkel für passive Geradführungen in der Regel

---

keine Rolle. Während die beschriebenen Handhabungsmechanismen, der Wippkran und die Pumpe aktive Geradführungen sind, sind die Wattsche Kolbenführung, die Führung der Kreissäge und der Mechanismus zum Lagefehlerausgleich beim Fügen passive Geradführungen.

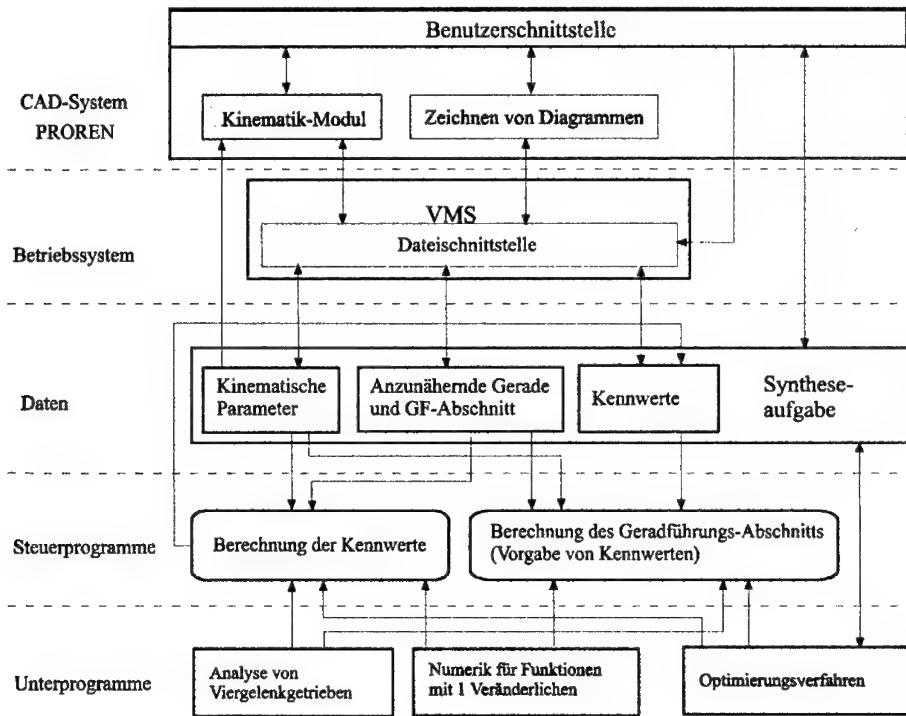
Zusammenfassend ergeben sich folgende Einteilungskriterien für Geradführungsaufgaben:

- exakte / angenäherte Geradführungen
- aktive / passive Geradführungen
- Nutzung der ganzen Koppelkurve / Nutzung eines Abschnitts
- vollständige GF / ein Geradführungsabschnitt / mehrere Geradführungsabschnitte
- Führung eines Punktes / einer Ebene
- mit / ohne Übertragungsaufgabe

Dem Konstrukteur ist jedoch oft nicht unmittelbar eine Geradführungsaufgabe gestellt, sondern er muß das Problem erst strukturieren und möglichst in einfachere Teilprobleme entsprechend VDI 2727 gliedern. Hierbei ist Erfahrung und Intuition des Konstrukteurs unabdingbar. Die in Abschnitt 2.4 erwähnte Abbremsung von Papierbögen zeigt, daß eine vorgegebene Funktion durchaus auf völlig unterschiedliche Bewegungsaufgaben zurückgeführt werden kann.

### 3 Kennwerte für Geradführungen

#### 3.1 Programmierumgebung



**Bild 3.1:** Struktur des Programmsystems zur Berechnung der Kennwerte und Einbettung in die Programmierumgebung

Bild 3.1 zeigt die zur Berechnung und Optimierung von Kennwerten entwickelten Programme. Die grau unterlegten Teile waren bereits vorhanden oder wurden anderen Bibliotheken entnommen und angepaßt. Die Berechnungsprogramme wurden in der Programmiersprache FORTRAN 77 erstellt, um die Integration in das CAD-System PROREN [ISY90] und den am Institut entwickelten Kinematik-Modul [Kn88, KF89, Kn90] zu ermöglichen. Sie beinhalten jedoch keine CAD-orientierten Ein- oder Ausgaben und können deshalb sowohl wie oben dargestellt innerhalb des vom Institut entwickelten Kinematik-Moduls, als auch unabhängig davon etwa auf PCs verwendet werden. Die Funktionen des CAD-Systems und das vorhandene Kinematikpaket werden außerhalb des

Berechnungsmoduls für folgende Aufgaben genutzt:

- grafische Darstellung von Koppelkurven und Stellungen ermittelte Geradführungsgetriebe
- Anwendung der Lagensynthese für Geradführungen
- Simulation des Bewegungsablaufs
- Erstellung von Kurventafeln und Diagrammen
- interaktive Vorgabe von Kennwerten und Randbedingungen
- Export von Bildern in andere Grafikformate

Dazu werden die berechneten Getriebedaten, Kennwerte u.a. auf Dateien gespeichert, die vom vorhandenen Kinematik-Modul verarbeitet werden können.

### 3.2 Bezeichnungen und Definitionen

**Definition:** Eine Geradführung (GF) ist ein Tupel  $(G, g, S_0, S_1)$  aus einem Viergelenkgetriebe  $G$ , der zu approximierenden Geraden  $g$  und dem durch die Getriebestellungen  $S_0$  und  $S_1$  für Anfang und Ende der Geradführung bestimmten Geradführungsabschnitt.

Man beachte, daß die Koppelpunkte  $K_0$  und  $K_1$  dieser beiden Stellungen im allgemeinen nicht auf der Geraden  $g$  liegen. Daher ordnet man jedem Koppelpunkt  $K$  den Lotpunkt  $L_g(K) \in g$  zu (vgl. Bild 3.2). Die Menge der zum Geradführungsabschnitt gehörenden Lotpunkte ist die *Geradführungsstrecke*, deren Länge die *Geradführungslänge*  $L$ .

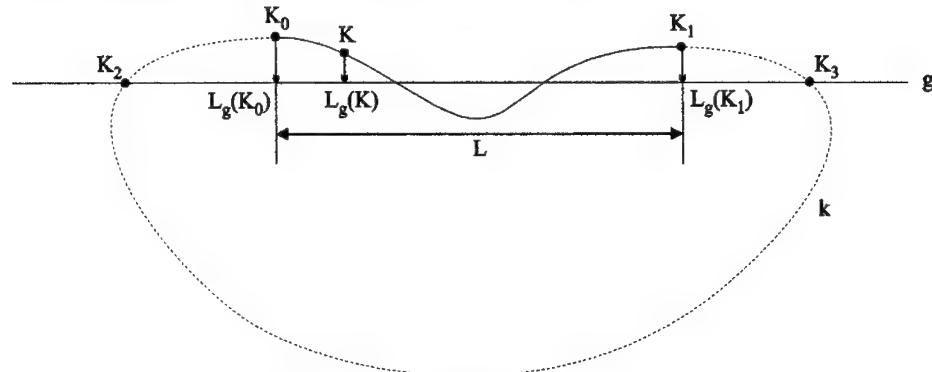


Bild 3.2: Koppelkurve und Geradführungsreich

Wenn die Funktion  $K \rightarrow L_g(K)$  im Geradführungsabschnitt injektiv ist, d.h. verschiedene Koppelpunkte verschiedene Lotpunkte auf  $g$  haben, so gilt  $L = |L_g(K_1) - L_g(K_0)|$ , d.h. die Geradführungslänge ist der Abstand der Lotpunkte der Koppelpunkte von Anfang und

Endstellung. Sonst nennt man die Geradführung *rückläufig* und zur Berechnung der Geradführungsänge sind alle Koppelpunkte im Geradführungsbereich zu ermitteln.

Wäre in Bild 3.2 g als Gerade durch  $K_0$  und  $K_1$  gewählt worden oder der Geradführungsabschnitt durch  $K_2$  und  $K_3$  begrenzt worden, so läge trotz Verwendung der gleichen Koppelkurve eine andere Geradführung vor: Im ersten Fall wäre die Annäherung an die zu approximierende Gerade g in der Mitte der Geradführung wesentlich schlechter, im zweiten Fall wäre die Geradführungsänge größer.

Die explizite Angabe des Geradführungsabschnitts und der Geraden g ermöglicht also erst die Definition und Berechnung der Geradführungskennwerte und damit den Vergleich verschiedener Getriebe, besagt jedoch keineswegs, ob das vorliegende Getriebe überhaupt sinnvoll als Geradführung verwendet werden kann. Umgekehrt approximieren die Koppelkurven guter Geradführungen die Gerade oft so gut, daß im Folgenden häufig Prinzipzeichnungen verwendet werden, die keine tatsächlichen Koppelkurven darstellen, um die unterschiedlichen GF-Charakteristiken deutlicher hervorheben zu können.

Zur Definition der Kennwerte und Entwicklung von Programmen zur Berechnung der Kennwerte ist es notwendig, die Geradführung zu parametrisieren. Dazu müssen das Viergelenkgetriebe G, die zu approximierende Gerade g und der Geradführungsbereich durch Zahlenwerte eindeutig bestimmt werden. Beispielsweise wird festgelegt, welcher der durch die beiden Stellungen aufgetrennten Abschnitte der Koppelkurve der Geradführungsbereich ist.

Das Viergelenkgetriebe G wird durch folgende 9 Parameter bestimmt (Bild 3.3):

- die Koordinaten der beiden Gestellpunkte  $A_0$  und  $B_0$
- die Längen  $\overline{A_0A}$ ,  $\overline{B_0B}$  und  $\overline{AB}$  von Antrieb, Abtrieb und Koppel
- die Lage des Koppelpunktes K wird durch den Winkel  $\kappa$  im Koppeldreieck und die Länge  $\overline{AK}$  bestimmt.

Für umlauffähige Getriebe steuert das Vorzeichen von  $\overline{A_0A}$  den Zusammenbau des Getriebes<sup>2</sup>. Diese Getriebemaße werden in dem Vektor  $(z_1, \dots, z_9)$  zusammengefaßt.

Die Gerade g ist durch ihre Geradengleichung  $ax + by + c = 0$  definiert.

Der Geradführungsabschnitt der Koppelkurve wird durch zwei Getriebestellungen bestimmt: die Anfangs- und die Endstellung mit den Antriebwinkeln  $\phi_0$  und  $\phi_1$  und den zugehörigen Punkten  $K(\phi_0)$  und  $K(\phi_1)$  der Koppelkurve.

---

<sup>2</sup> Bei Optimierungsverfahren sind für jedes Vorzeichen getrennte Optimierungen erforderlich.

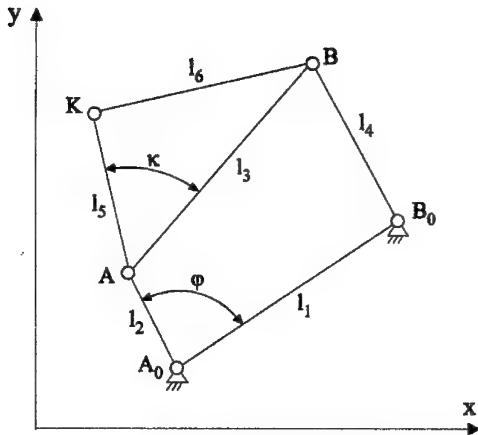


Bild 3.3: Bezeichnungen für das Viergelenk

Zur Charakterisierung einer Stellung wird bei umlaufendem Antrieb der Winkel  $\phi$  zwischen Antrieb und Gestell verwendet.

Bei schwingendem Antrieb wäre diese Zuordnung nicht eindeutig. Daher wird in diesem Fall ein Hilfsparameter  $t$  verwendet, der das Intervall  $[0, 2\pi)$  eindimensional auf die Koppelkurve abbildet. Für die in Bild 3.4 abgebildeten Sonderstellungen gilt nachstehende Tabelle, in den Intervallen dazwischen ist die Funktion  $\phi \rightarrow t$  linear.

Stellung	$t$	$\phi(t)$
1	0	$\phi_1 = \angle B_0 A_0 A_1 = 0$
2	$\pi/2$	$\phi_2 = \angle B_0 A_0 A_2$
3	$\pi$	$\phi_3 = \angle B_0 A_0 A_1 = 0$
4	$3/2 \pi$	$\phi_4 = \angle B_0 A_0 A_1 = -\phi_2$

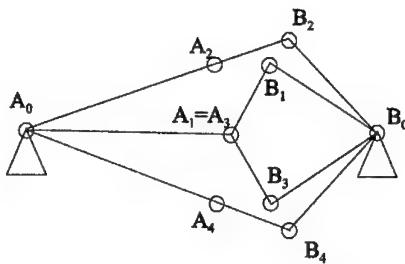


Bild 3.4: Parametrisierung der Koppelkurve

Beispielsweise gilt für  $\phi \in \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right]$  die Gleichung  $t = \phi_2 + \frac{\phi - \pi/2}{\pi - \pi/2} (\phi_3 - \phi_2)$ .

Dies ist erforderlich, damit bewährte numerische Verfahren - etwa zur Bestimmung von Extrema oder Nullstellen in einem vorgegebenen Intervall - nicht wegen getriebetechnischer Besonderheiten (hier: Mehrdeutigkeit des Antriebswinkels) verändert werden müssen und damit den modularen Aufbau des Programmsystems erschweren. Der Geradführungsabschnitt wird nun durch die Parameter  $t_0$  für die Anfangsstellung und  $t_1$  für die Endstellung bestimmt. Dabei ist für  $t_0 < t_1$  der Geradführungsabschnitt durch das Intervall  $[t_0, t_1]$  gegeben, sonst

durch  $[t_0, 2\pi + t_1]$ . Einerseits können so auch Geradführungen betrachtet werden, bei denen das Glied  $\overline{A_0 A}$  seine Drehrichtung während der Geradführung ändert, was für Getriebe, die im Koppelpunkt angetrieben werden oder auch für Teilgetriebe eines höhergliedrigen Getriebes durchaus sinnvoll erscheint, und andererseits ist so auch formal eindeutig festgelegt, welcher der beiden durch  $t_0$  und  $t_1$  aufgetrennten Abschnitte der Koppelkurve der Geradführungsreichbereich ist.

Für Geradführungen mit mehreren Geradführungsabschnitten wird für jeden Abschnitt ein entsprechendes Intervall betrachtet.

Da auch klassische Syntheseverfahren betrachtet werden, bei denen in der Regel das Viergelenkgetriebe in einer oder mehreren Stellungen ermittelt wird und dieses Getriebe dann mit den Modulen zur Berechnung von Kennwerten untersucht werden soll, wurde auch ein Unterprogramm erstellt, das zu einer gegebenen Stellung den zugehörigen Parameter  $t$  bestimmt.

*Durch eine Drehstreckung des Getriebes kann stets erreicht werden, daß der Anfangspunkt der Geradführung der Punkt  $K_0 = (0,0)$  ist und der Endpunkt der Punkt  $K_1 = (1,0)$ . Dies wird daher von nun an stets vorausgesetzt.*

Die Definition und Berechnung der Kennwerte wird durch diese Koordinatentransformation bedeutend vereinfacht, weil sie lediglich mit dem Getriebe und nicht für jede Stellung durchgeführt werden muß. Darüber hinaus sind alle Längen bereits auf die Geradführungsstrecke normiert. Ferner zeigten bereits die Beispiele in Kapitel 2, daß die Zerlegung der Bewegung in horizontale und vertikale Komponenten den unterschiedlichen GF-spezifischen Eigenschaften des Mechanismus entspricht. Die Lage des Koppelpunktes in der Ebene wird nun durch die kartesischen Koordinaten  $K(t) = (x(t), y(t))$  bezeichnet, die Indizes 0 und 1 stehen auch im Folgenden jeweils für Anfangs- und Endstellung der Geradführung. Die x-Koordinate beschreibt also die Bewegung in GF-Richtung; die y-Koordinate beschreibt die Bewegung quer zur GF.

### 3.3 Systematik

Die Kennwerte lassen sich entsprechend ihrer **Bedeutung** für den Konstrukteur in 4 Gruppen einteilen:

- a) Kennwerte zur Beschreibung der Güte der Annäherung der Koppelkurve an die Geradführungsstrecke.

---

Diese Kennwerte sollen es ermöglichen, die Bewegung des Koppelpunktes mit der idealen Bewegung auf einer Geraden zu vergleichen. Die letztere wird jedoch nicht bloß durch ihre Koordinaten (Geradengleichung  $y(t) = 0$ ) charakterisiert:

- Eine Strecke ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten.
- Alle Ableitungen von  $y(t)$  und die Krümmung sind 0
- Die Tangente ist waagerecht

Daher ist es prinzipiell durchaus denkbar, das Verhältnis der Geradführungslänge zur Länge der Koppelkurve oder den minimalen Krümmungsradius als Gütekriterium zu verwenden. Bei den im vorigen Kapitel aufgeführten Beispielen haben diese Werte jedoch keine unmittelbare Bedeutung. Obgleich eine hohe Krümmung im Geradführungsbereich grundsätzlich nicht wünschenswert ist (hohe Kräfte), kann eine bloße Kenntnis der Krümmungsverhältnisse eine dynamische Analyse nicht ersetzen. Obwohl Krümmung und Bogenlänge zum qualitativen Vergleich zweier Geradführungen geeignet sind, sind sie als Kennwerte weniger geeignet als Größen wie Kräfte, Momente oder Geschwindigkeiten, die direkte Hinweise auf die Funktionsfähigkeit des Mechanismus liefern. Beispielsweise gilt dies für den Abstand der Koppelkurve von der Geraden und für die Komponenten der Geschwindigkeit oder Beschleunigung quer zur Geradführungsrichtung. Bei kinetostatischer Betrachtung ist der Winkel zwischen Koppelkurventangente und Geradführungsstrecke von großer Bedeutung (Wippkran oder Fügemechanismen).

Alle betrachteten Größen sind zunächst in jedem Koppelpunkt definiert, lassen sich also als Funktion  $f(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  betrachten. Dies ist jedoch nur sinnvoll, wenn eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit oder vorgegebenem Geschwindigkeitsverlauf erwünscht ist, also neben der Führungsaufgabe auch eine Übertragungsaufgabe gelöst werden soll. Ansonsten ergibt sich aus der Zuordnung eines Punktes der Koppelkurve zur zu approximierenden Geraden durch Bildung des Lotpunkts eine Funktion  $f(x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Da die geradlinige Sollbewegung in beiden Fällen der Nullfunktion entspricht, können als Gütekriterium alle  $L^p$ -Normen verwendet werden. Beispielsweise berechnet man die Maximumsnorm  $L^\infty$  einer Funktion durch Bestimmung ihres betagsmäßig größten Wertes. Die mathematische Definition dieser Normen lautet wie folgt:

$$L^\infty(f) = |f|^\infty = \text{Max}\{f(t) | t \in [t_0, t_1]\} \quad \text{und} \quad L^p(f) = |f|^p = \left( \int_{t=t_0}^{t=t_1} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

Für  $p \neq \infty$  sollte über  $x$  integriert werden, da sonst Abweichungen von der Geraden in

---

Stellungen mit niedriger Geschwindigkeit stärker berücksichtigt werden. Da die Koppelkurve nur in endlich vielen Punkten betrachtet werden kann, müssen diese Formeln diskretisiert werden, d.h. das Integral wird durch eine Summe angenähert und auch das Maximum kann nur näherungsweise iterativ berechnet werden.

**b) Kennwerte des Gesamtgetriebes**

Hierzu zählen der Platzbedarf des Getriebes, der minimale Übertragungswinkel  $\mu$  oder die Bewegungsgüte und dynamische Eigenschaften, sowie die Toleranzempfindlichkeit. Obgleich gerade die Toleranzempfindlichkeit des Getriebes beim Vergleich der Abweichung der Koppelkurve von der anzunähernden Geraden berücksichtigt werden muß, kann im Rahmen dieser Arbeit eine Entwicklung von Verfahren zur Toleranzanalyse bzw. deren Anwendung auf Geradführungen nicht erfolgen. Ferner ist auch die Eignung des Übertragungswinkels und anderer Methoden zur Beurteilung der Bewegungsgüte in der Literatur noch nicht endgültig geklärt<sup>3</sup>. Der Platzbedarf ist zwar auch kein Kennwert speziell von Geradführungsgetrieben, doch da er stets im Gegensatz zur Geradführungsgüte steht und zumindest für Anwendungen, bei denen die gesamte Koppelkurve durchlaufen wird, von großer Bedeutung ist, wird er ausführlicher untersucht.

**c) Kennwerte, die eine Beziehung zwischen dem Geradführungsbereich und dem Gesamtgetriebe herstellen**

Hier werden insbesondere geometrische Eigenschaften, wie die Lage der Gestellpunkte oder der Bewegungsbereich der Glieder betrachtet. Auch qualitative Vorgaben (siehe z.B. 2.2: die Lage der Gestellpunkte relativ zur Koppelkurve bei Schreitmaschinen) können so erfaßt werden.

**d) Kennwerte, die eine Beziehung zwischen mehreren Geradführungsbereichen beschreiben**

Von besonderem Interesse sind die relative Lage der verschiedenen Geradführungsstrecken und die entsprechenden Antriebswinkelbereiche

Allen diesen Kennwerten liegt eine eng begrenzte Auswahl geometrischer, kinematischer oder dynamischer Größen zugrunde, die für jede einzelne Getriebestellung definiert sind, jedoch entsprechend obiger Einteilung je nach Kennwert wahlweise im Geradführungsbereich, für die gesamte Koppelkurve oder nur für Anfangs- und Endpunkt der Geradführung ausgewertet werden.

---

<sup>3</sup> Vorgeschlagen wurden beispielsweise die Determinante, die bei der numerischen Analyse von Gelenkgetrieben mit Hilfe der FEM-Methode auftritt oder die Betrachtung des Viergelenks als Stabwerk.

---

Beispielsweise ist die y-Koordinate des Koppelpunktes sowohl für die Berechnung der Abweichung von der Geraden als auch für den Platzbedarf des Getriebes von Bedeutung. Ferner können auch  $y_0$  und  $y_1$  von Bedeutung sein, wenn die Anfangs- oder Endstellung eine besondere technische Funktion hat<sup>4</sup>. Neben den Koordinaten des Koppelpunktes und deren Ableitungen wurde aber auch für theoretische Untersuchungen der Abstand zwischen Koppelpunkt und Ballschem Punkt im Geradführungsbereich betrachtet.

Zur Bewertung von Größen, die auf einem Intervall (dem Geradführungsbereich oder der gesamten Bewegung) definiert sind, können die oben beschriebenen Abstandsbewertungen ( $L^p$ -Normen) verwendet werden. Als wichtigste dieser Normen zur Beurteilung von Geradführungen sieht der Autor die **Maximumsnorm** oder **Tschebyscheff-Norm** an:

Die maximale Abweichung der Koppelkurve von der gegebenen Geraden, maximale und minimale Geschwindigkeit sowie maximale Beschleunigung quer zur Geradführungsrichtung sind für den Konstrukteur einfacher zu interpretierende Größen als die Summe (oder das Integral) von Quadraten oder höheren Potenzen. Andererseits liefert die  $L^1$ -Norm Größen wie beispielsweise die Bogenlänge oder die Fläche zwischen Koppelkurve und Gerade, die geometrisch unmittelbar verständlich sind, für die überwiegende Mehrzahl der in der Praxis auftretenden Aufgaben jedoch irrelevant sind. Dagegen ist die in der Praxis beispielsweise zur Vermeidung von Kollisionen erforderliche Untersuchung des **minimalen Abstands** zweier Funktionspunkte oder ganzer Körper mathematisch äquivalent zur Betrachtung der Maximumsnorm.

**Anmerkung:** Inhaltlich gerechtfertigt ist die  $L^2$ -Norm (**euklidische Norm**: Summe oder Integral der Quadrate der Abweichungen) in erster Linie dann, wenn zu gegebenen Meßwerten, die als normalverteilt um den wirklichen Wert angesehen werden, und einem zugehörigen physikalischen Gesetz die **wahrscheinlichsten** Parameter bestimmt werden sollen, da gezeigt werden kann, daß für diese Aufgabe die Methode der kleinsten Quadrate eine optimale Anpassung liefert. Für den Vergleich zweier theoretisch als exakt anzusehender, nicht zufallsbehafteter Funktionen wird daher in der Mathematik nicht die euklidische, sondern die Maximumsnorm verwendet.

Diese Einschätzung steht in gewissem Gegensatz zu den in der Literatur bei der Getriebeoptimierung in der Regel verwendeten Zielfunktionen: Sind endlich viele Genaupunkte vorgegeben, so wird in der Regel eine (gewichtete) Summe der Quadrate der Abstände der Ist-Punkte von den Soll-Punkten betrachtet. In vielen Fällen wird jedoch bei der

---

<sup>4</sup> Dies ist beispielsweise bei Schreitmaschinen (Abschnitt 2.2) der Fall:  $y'(t_0)=y'(t_1)$

Vorstellung eines Beispiels der maximale Abstand angegeben, daher ist denkbar, daß Konvergenzprobleme, die bei der Verwendung der Maximumsnorm in numerischen Optimierungsverfahren in der Regel auftreten, Ursache dieser Diskrepanz sind.

Andererseits bestätigen die zur Beurteilung von Kurvengetrieben verwendeten Kennwerte  $c_v$ ,  $c_a$  und  $c_j$ , die ja als Maximalwerte von Geschwindigkeit, Beschleunigung u.s.w. definiert sind, die obige Ansicht.

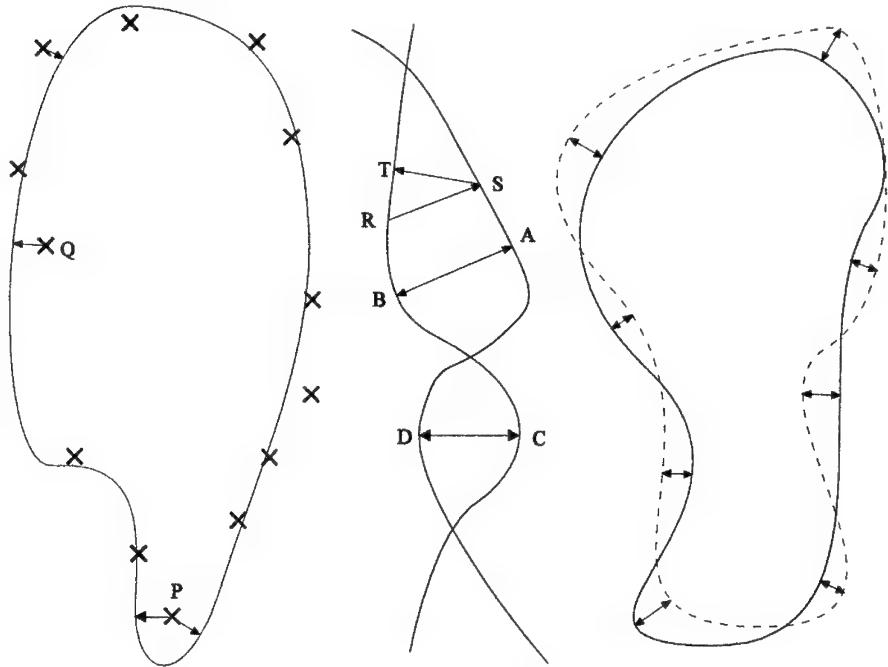
An dieser Stelle sollte jedoch in erster Linie eine möglichst breite Basis zur Beurteilung von Geradführungsgtrieben geschaffen und die Erstellung der Berechnungsmodelle durch die Systematisierung der Kennwerte erleichtert werden. Daher wurden die Berechnungsprogramme so gestaltet, daß wahlweise auch andere Normen verwendet werden können.

Übrigens läßt sich die Maximumsnorm auch zur Definition des Abstands beliebiger Kurven (oder des Abstands eines geschlossenen Polygonzugs zu einer Kurve) verwenden. Da in diesen Fällen nicht ohne weiteres eine eindeutige Zuordnung der Kurvenpunkte möglich ist, wie folgendes Bild veranschaulicht, ist die Anwendung der anderen  $L^p$ -Normen problematisch:

Bei der linken Kurve soll die Koppelkurve endlich viele Genaupunkte approximieren. Soll zur Beurteilung der Güte eine von der Maximumsnorm verschiedene  $L^p$ -Norm verwendet werden, so muß jedem der Genaupunkte ein Kurvenpunkt zugeordnet werden. Diese Zuordnung ist zwar für Q, nicht aber für P eindeutig. Ähnliche Probleme ergeben sich bei der Definition eines Abstands zwischen zwei Kurven (Mitte). Es ist fraglich, welchem Punkt S zugeordnet werden soll: T oder R oder keinem von beiden<sup>5</sup>. In jedem Kurvenabschnitt zwischen zwei Schnittpunkten läßt sich jedoch der maximale Abstand dieser Abschnitte definieren: hier steht die Verbindungsstrecke senkrecht auf beiden Kurven (Punkte A,B und C,D). Der Abstand zweier geschlossener Kurven ergibt sich dann als maximale Länge solcher Strecken. Die rechte Skizze zeigt, daß dieses Verfahren auch anwendbar ist, wenn es in einem Abschnitt mehrere „Doppelorte“ gibt<sup>6</sup>.

<sup>5</sup> Auch bei Verwendung der Bogenlänge zwischen 2 Schnittpunktes lassen sich leicht Beispiele konstruieren, die eine unbefriedigende Zuordnung liefern.

<sup>6</sup> Die Summe der Flächen zwischen benachbarten Kurvenschnittpunkten ist möglicherweise ebenfalls als Abstandskriterium geeignet



**Bild 3.5:** Zuordnungsprobleme bei Führungsaufgaben

Zur Lösung dieses Problems werden in der Literatur bei der Getriebeoptimierung zusätzlich zu den kinematischen Abmessungen des Getriebes eine der Anzahl der Genaupunkte entsprechende Zahl von Antriebswinkeln variiert, die die Zuordnung zu den Genaupunkten liefern. Dies führt jedoch zu einer sehr hohen Zahl an Parametern und damit in der Regel zu langsamer Konvergenz der Optimierungsverfahren. Andere Möglichkeiten, die Güte der Annäherung zu bewerten, werden in [Gü94, S. 119ff] diskutiert.

Insgesamt bleibt festzustellen, daß Methoden, die zur Bewertung der Güte beliebiger Führungskurven verwendbar sind, aufwendiger und problematischer sind als die hier vorgestellte Verwendung des Lotpunktes speziell für Geradführungen. Umgekehrt kann die Verwendung der Maximumsnorm durchaus auf andere Führungsgtriebe übertragen werden.

### 3.4 Getriebetechnische Unterprogramme

Aus dem vorhandenen Kinematik-Modul [ISY90, Kn90] wurden folgende Programme entnommen und den Anforderungen bei der Berechnung der Kennwerte angepaßt:

- Eine Strecke ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten.
- Berechnung des Koppelpunktes  $K = (x, y)$  und der Punkte  $A = (x_A, y_A)$  und  $B = (x_B, y_B)$  in Abhängigkeit vom Antriebswinkel  $\phi$
- Klassifizierung des Viergelenks und Berechnung der Schwingbereiche von Antrieb und Abtrieb
- Berechnung von Geschwindigkeit und Beschleunigung des Koppelpunktes zu gegebener Stellung
- Berechnung des Krümmungsradius  $\rho$  der Koppelkurve
- Berechnung des Kraftangriffswinkels  $\mu$
- Berechnung des Momentanpols P
- Berechnung des Wendekreises
- Berechnung der Burmesterschen Punkte
- Berechnung des Ballschen Punktes
- Berechnung der Übertragungsfunktionen 0., 1. und 2. Ordnung und der Winkelgeschwindigkeit bzw. Beschleunigung der Koppel

Dabei wurde bereits die Ausführungs geschwindigkeit und numerische Stabilität gegenüber den vorhandenen Programmen deutlich erhöht, indem

- keine trigonometrischen Funktionen zur Berechnung von K und B verwendet werden
- Hilfsgrößen, die (bei gleichem Getriebe) für jede Stellung benötigt werden, nur einmal berechnet werden
- Sonderfälle bei geometrischen Verfahren (z.B. Pol liegt im Unendlichen) durch Verwendung algebraischer Verfahren vermieden wurden.

Wenn geometrische Verfahren direkt umgesetzt werden, so müssen oft Fallunterscheidungen vorgenommen werden, beispielsweise ob zwei Geraden parallel sind oder nicht. In der Nähe solcher Punkte wird dann durch sehr kleine Zahlen geteilt, und der numerische Fehler vergrößert sich sehr stark. Bei einer vollständig algebraischen Betrachtung stellt sich oft heraus, daß der Quotient, dessen Verschwinden den Sonderfall bestimmt, am Schluß der Rechnung auch im Zähler steht. Geometrische Verfahren sind sinnvoll, wenn schrittweise interaktiv die Konstruktion verfolgt werden soll. Innerhalb eines numerischen Verfahrens ist dies in der Regel nicht der Fall und durch Näherungsprozesse treten die beschriebenen Probleme häufiger auf.

## 3.5 Mathematische Unterprogramme

### 3.5.1 Funktionen in einer Veränderlichen

Zur Berechnung von Geradführungskennwerten werden folgende mathematische Verfahren für Funktionen in einer Veränderlichen benötigt:

- Bestimmung von Extrema
- Bestimmung von Nullstellen
- Integration

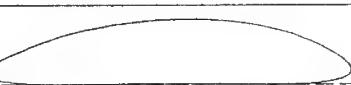
Dabei ist zu unterscheiden, ob von der betrachteten Funktion eine Ableitung vorliegt oder nicht. Der Vergleich der in der mathematischen Literatur betrachteten Verfahren hinsichtlich ihrer Effizienz und Anwendbarkeit auf die in 3.4 betrachteten Funktionen führte zur Verwendung folgender Programme, die zum Teil der Sammlung [EnMü86] entnommen und zum Teil selbst entwickelt wurden:

	Extrema	Nullstellen	Integration
ohne Ableitung	Interpolation durch eine Parabel und Bestimmung des Scheitels	Pegasus-Verfahren	Romberg-Verfahren
mit Ableitung	Interpolation durch eine kubische Parabel nach Davidon Nullstellen-Verfahren für $f'$	Newton-Verfahren	Interpolation durch einen Hermite-Spline fünften Grades

Da die Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen und Extrema einen guten Startwert erfordern, wird das zu untersuchende Intervall zunächst mit gleichmäßiger Schrittweite nach Vorzeichenwechseln der Funktion bzw. ihrer Differenzenquotienten durchsucht. Für diese Werte wird dann jeweils das entsprechende Iterationsverfahren aufgerufen. Sämtliche so ermittelten Nullstellen bzw. lokale Extrema werden mit dem zugehörigen Parameter  $t$  in einer Liste gespeichert. Man erhält so beispielsweise nicht nur die maximale Abweichung der Koppelkurve von der Geraden  $g$ , sondern alle Koppelpunkte, für die die Tangente parallel zur Geradführungsrichtung ist. Dies ist bei der Optimierung von Geradführungen eine wichtige Information im Hinblick auf den Alternantensatz von Tschebyscheff (vgl. Kapitel 6 und 9). Ferner werden alle Schnittpunkte der Koppelkurve mit der Geraden  $g$  ermittelt, wodurch u.a. qualitativ unterschiedliche Verläufe der Koppelkurve unterschieden werden können.

Beispielsweise hat in Bild 3.2 aus Abschnitt 3.2 die Koppelkurve die Charakteristik P-P-P-P, dabei liegen aber 2 der außerhalb des Geradführungsbereichs. Aus der Untersuchung der Schnittpunkte mit  $g$  und der Extrema der Abstände der Koppelpunkte von  $g$  ergibt sich aber

weder der Grad der Annäherung bei unendlich benachbarten Genaupunkten, noch ob die vorliegende Koppelkurve einen weiteren als Geradführung nutzbaren Abschnitt hat (vgl. Abschnitt 3.7).

Prinzipskizze der Koppelkurve	GF-Charakteristik	Schnittpunkte mit g außerhalb des GF-Bereichs
	P-P-PP	0
	PPP	1
	P-P-P	1
	PP-PP	2
	PPPP	2

**Bild 3.6:** Qualitativ unterschiedliche Form von Koppelkurven

Die unteren beiden Kurven von Bild 3.6 zeigen, daß neben der Anzahl der Schnittpunkte auch die zugehörigen x-Koordinaten zur Bestimmung der Charakteristik ausgewertet werden müssen.

### 3.6 Aufbau der Programme zur Berechnung der Kennwerte

Beim Aufbau des Programmsystems waren folgende Punkte zu berücksichtigen:

- Es muß programmtechnisch leicht möglich sein, wahlweise alle Kennwerte oder nur einzelne Kennwerte zu berechnen, damit keine überflüssigen Berechnungen ausgeführt werden.
- Die Genauigkeit der iterativen Berechnungsverfahren soll variabel sein.
- Die Kennwerte müssen sich auf einfache Weise zu einer komplexen Zielfunktion zusammensetzen lassen.

Daher werden die Kennwerte entsprechend ihrer Klassifikation in einem 3-dimensionalen Feld gespeichert.

- Der erste Index gibt an, welche kinematische Größe dem Kennwert zugrunde liegt (z.B. x-Koordinate der Lage des Koppelpunktes).
- Der zweite Index gibt an, ob dieser Wert im Anfangspunkt, im Endpunkt, im Geradführungsabschnitt oder für die gesamte Koppelkurve betrachtet werden soll.
- Der dritte Index beschreibt die mathematische Operation (die Norm), die für den betrachteten Bereich ausgeführt werden soll.

Es sind allerdings nicht alle denkbaren Kombinationen sinnvoll. Einerseits sind nun alle Kennwerte in einem Vektor zusammengefaßt, der die Zusammenfassung der Anforderungen des Anwenders in einer Zielfunktion ermöglicht, und andererseits kann aus der Auswahl der zu berechnenden Kennwerte leicht ermittelt werden, ob für eine gegebene Stellung beispielsweise die Berechnung der Krümmung erforderlich ist, oder ob nur die Koordinaten des Koppelpunktes zu ermitteln sind.

### 3.7 Benennung und Kennwertkatalog

Die Benennung der Kennwerte soll einerseits die entwickelte Systematik widerspiegeln, andererseits sollen auch bestehende Konventionen eingehalten und für die wichtigsten Kennwerte einprägsame Symbole gewählt werden. Da sich diese Forderungen praktisch ausschließen, werden bereits in der Literatur verwendete Kennwerte in einigen Fällen mit zwei Bezeichnungen versehen. Die folgenden Tabellen führen beispielhaft alle Kennwerte auf, die sich aus den Koordinaten der Punkte  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $A(t) = (x_A(t), y_A(t))$ ,  $B(t) = (x_B(t), y_B(t))$  des Koppelpunktes  $K(t) = (x(t), y(t))$  und ihren Ableitungen bestimmen lassen. Beispielsweise erhält man auch den Drehwinkel  $\rho$  der Koppel (vgl. Bild 3.2) aus den Koordinaten von A und B. Neben der GF-Güte q sind insbesondere die gebrauchslagenorientierten Platzbedarfskennwerte b und d von Bedeutung.

Folgende Konventionen werden in den folgenden Tabellen verwendet:

- Ein Kreis rechts über einem Symbol wie in  $y_{\max}^O$  gibt an, daß der Wert über die gesamte Koppelkurve ausgewertet wird.
- Ein Strich über einem Symbol wie in  $\bar{y}_{\max}$  gibt an, daß der Wert nur im Geradführungsbereich ausgewertet wird.  $\bar{v}$  bezeichnet jedoch die mittlere Geschwindigkeit im Geradführungsbereich!

Ferner werden folgende Abkürzungen verwendet:

$\rho(t) = \tan^{-1} \frac{y_B(t) - y_A(t)}{x_B(t) - x_A(t)}$	Winkel zwischen Koppel und x-Achse
$\alpha(t) = \tan^{-1} \frac{y'(t)}{x'(t)}$	Winkel zwischen Koppelkurve und x-Achse
$\varphi_g = \varphi(1) - \varphi(0)$	Antriebswinkelbereich der Geradführung
$\delta_x(t) =  x(t) - \bar{v}t $	x-Abstand zwischen geradlinig gleichförmiger Bewegung und Koppelpunkt
$\delta_{xy}(t) =  x(t) - \bar{v}t, y(t)  = \sqrt{(x(t) - \bar{v}t)^2 + y(t)^2}$	Euklidischer Abstand zwischen geradlinig gleichförmiger Bewegung und Koppelpunkt

**Tabelle 3.1:** Abkürzungen

Die beiden letzten Größen vergleichen die momentanen Ortskoordinaten eines geradlinig gleichförmig bewegten Punktes mit der des Koppelpunktes. Sie bieten eine Alternative zur Verwendung der Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung bei der Beurteilung der Geschwindigkeitskonstanz. Hierzu vergegenwärtige man sich das Beispiel der Abfüllung von Flaschen, die sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, aus Kapitel 2.3: Hier ist nicht etwa die momentane Relativgeschwindigkeit  $x'(t) - \bar{v}$  des Koppelpunktes in Bezug auf die Flasche von Bedeutung, sondern sein Abstand von der Symmetriearchse der Flasche. Steht die Koppelkurve senkrecht auf dieser Achse (vgl. Bild 2.5), so muß  $\delta_{xy}(t) < r$  gelten, wobei  $r$  der Radius des Flaschenhalses ist. Bei einer Anordnung entsprechend Bild 2.4 entspricht die Abweichung von der Geraden einer Bewegung in Richtung der Achse, so daß  $\delta_x(t)$  anstelle von  $\delta_{xy}(t)$  als Kennwert verwendet werden muß. Ist konstruktiv nicht die Lageabweichung zu minimieren, sondern der Geschwindigkeitsverlauf  $x'(t)$  möglichst gleichmäßig zu gestalten, so kann die Differenz  $v^+ - v^-$  von maximaler und minimaler Geschwindigkeit in x-Richtung einerseits auf die Summe dieser Größen oder auf die mittlere Geschwindigkeit  $v$  im GF-Bereich bezogen werden, welche wegen der Normierung der Geradführungsstrecke zu  $\phi_1 - \phi_0$  proportional ist (vgl. zweite Kennwerttabelle).

kinematische Größe(n)	Bereich für t	Definition u. Bezeichnung	Bedeutung u. Bemerkungen	
$y(t)$	$t = t_0$	$y_0$	Abweichung der Koppelkurve von der Geraden am Anfang und Ende der Geradführung	
	$t = t_1$	$y_1$		
	$[t_0, t_1]$	$h^+ = \text{Max}(y(t))$	Je nach dem Wirkungsprinzip des Mechanismus kann das Vorzeichen der Abweichung von der Geraden von Bedeutung sein!	
		$h^- = \text{Min}(y(t))$		
	$[0, 2\pi]$	$q = h^+ - h^-$	Geradführungsglité	
		$y_{\max}$	maximale y-Koordinate der KK	
		$y_{\min}$	minimale y-Koordinate der KK	
$y_A(t)$ $y_B(t)$	$[t_0, t_1]$	$d = y_{\max} - y_{\min}$	Dicke der Koppelkurve	
		$\bar{y}_{\max}$	y-Koordinaten und Höhe des kleinsten achsenparallelen Rechtecks, welches das Getriebe in jeder Stellung im GF-Bereich umschließt	
		$\bar{y}_{\min}$		
	$[0, 2\pi]$	$\bar{d} = \bar{y}_{\max} - \bar{y}_{\min}$		
$x(t)$	$[0, 2\pi]$	$y_{\max}^O$	y-Koordinaten und Höhe des kleinsten achsenparallelen Rechtecks, welches das Getriebe in jeder Stellung umschließt	
		$y_{\min}^O$		
		$d^O = y_{\max}^O - y_{\min}^O$		
	$[0, 2\pi]$	$x_{\max}$	maximale x-Koordinaten der KK	
$x_A(t)$ $x_B(t)$		$x_{\min}$	minimale x-Koordinaten der KK	
		$b = x_{\max} - x_{\min}$	Breite der Koppelkurve	
$[t_0, t_1]$	$\bar{x}_{\max}$	x-Koordinaten und Breite des kleinsten achsenparallelen Rechtecks, welches das Getriebe in jeder Stellung im GF-Bereich umschließt		
	$\bar{x}_{\min}$			
	$\bar{b} = \bar{x}_{\max} - \bar{x}_{\min}$			
$x_A(t)$ $x_B(t)$	$[0, 2\pi]$	$x_{\max}^O$	x-Koordinaten und Breite des kleinsten achsenparallelen Rechtecks, welches das Getriebe in jeder Stellung umschließt	
		$x_{\min}^O$		
		$b^O = x_{\max}^O - x_{\min}^O$		
	$[t_0, t_1]$	$\bar{\rho} = \rho_{\max} - \rho_{\min}$	Drehwinkel der Koppel im GF-Bereich.	
$\mu(t)$		$\mu_{\min}^O = \text{Min}(\mu(t))$	Minimaler Kraftangriffswinkel	
$[0, 2\pi]$	$\bar{\mu}_{\min} = \text{Min}(\mu(t))$	Minimaler Kraftangriffswinkel im GF-Bereich		

Tabelle 3.2: Kennwerttabelle 1

Nicht sinnvoll erschien es insbesondere, die Geradführungsrichtung (und damit das verwendete kartesische Koordinatensystem) nicht zu betrachten und beispielsweise zur Beschreibung des Platzbedarfs die konvexe Hülle der vom Getriebe beanspruchten Fläche oder das kleinste beliebig orientierte Rechteck, welche das Getriebe in jeder Stellung umschließt (Vorschlag der VDI-Richtlinie 2725 über Getriebekennwerte), heranzuziehen. Wenn obige Kennwerte nicht ausreichen scheint es aussichtsreicher, bei der Optimierung

entsprechende Nebenbedingungen, beispielsweise für zulässige Gebiete der Koppelkurve, zu formulieren.

kinematische Größe	Bereich für t	Definition u. Bezeichnung	Bedeutung u. Bemerkungen
$y'(t)$	$[t_0, t_1]$	$y'_{\max} = \text{Max}( y'(t) )$	Maximale Geschwindigkeit quer zur GF-Richtung
$x'(t)$		$v^+ = \text{Max}(x'(t))$	maximale und minimale Geschwindigkeit im GF-Bereich
$x(t)$		$v^- = \text{Min}(x'(t))$	
$y(t)$		$\delta_v^* = (v^+ - v^-)/\bar{v}$	Ungleichmäßigsgrad der Geschwindigkeit
		$\delta_v = (v^+ - v^-)/(v^+ + v^-)$	
$x(t)$ $y(t)$		$\Delta_x = \text{Max}(\delta_x(t))$ $\Delta_{xy} = \text{Max}(\delta_{xy}(t))$	Maximaler Abstand des Koppelpunktes von gleichmäßig bewegtem Punkt
$x'(t)$ $y'(t)$	$t = t_0$	$\alpha_0 = \alpha(0)$	Ein- und Austrittswinkel der KK aus dem Geradführungsabschnitt
	$t = t_1$	$\alpha_1 = \alpha(1)$	
	$[t_0, t_1]$	$\alpha_{\max} = \text{Max}( \alpha(t) )$	Der Winkel zwischen Koppelkurve und GF-Strecke kann auch als Kraftangriffswinkel bei Antrieb im Koppelpunkt angesehen werden.
$y''(t)$		$a^+ = \text{Max}( y''(t) )$	maximale Querbeschleunigung

Tabelle 3.3: Kennwerttabelle 2

### 3.8 Vergleich unterschiedlicher Getriebe

Für die abschließende Bewertung der Kennwerte und die Entwicklung von Regeln für ein Expertensystem sind nicht nur Getriebe von Bedeutung, die bezüglich eines gegebenen Kennwertes optimal sind, sondern auch der Vergleich optimaler Getriebe für verschiedene Kennwerte. Ist beispielsweise ein Viergelenkgetriebe gegeben, so können die Koppelpunkte verglichen werden, die bezüglich der Güte Q bzw. im Hinblick auf die Fläche zwischen Geradführung und Koppelkurve optimale Geradführungen liefern. Die Untersuchung mehrerer zu optimierender Kennwerte führt dann zu einem Punkthaufen in der Koppelebene. So kann der "Abstand" dieser Getriebe untereinander oder zu Geradführungen mit unendlich benachbarten Genaupunkten ermittelt und festgestellt werden, ob die Vielfalt der Kennwerte wirklich erforderlich ist.

#### 3.8.1 Bestimmung des Geradführungsbereichs

Bei Anwendung von Verfahren zur Synthese von Geradführungen mit unendlich benachbarten Genaupunkten ist zwar die anzunähernde Gerade bekannt, jedoch ist kein Geradführungsbereich gegeben. Ebenfalls kann es nötig sein, gegebene Koppelkurven, bei denen ein Geradführungsbereich „ins Auge sticht“, bewerten zu müssen (vgl. Bild 3.2). Umgekehrt kann das Problem auftreten, bei gegebenem Antriebwinkelbereich für eine

Koppelkurve die Geradführungsstrecke so zu bestimmen, daß die Geradführungsgüte möglichst hoch ist.

Allgemeiner gesprochen ist neben der Optimierung von Geradführungen bezüglich eines Kennwertes oder einer gegebenen Zielfunktion auch die Vorgabe von Kennwerten K von großer Bedeutung. Im Prinzip kann diese Aufgabe zwar durch Betrachtung der Funktion  $f = (K_{soll} - K_{ist})^2$  auf eine Optimierungsaufgabe zurückgeführt werden, es müssen dann jedoch zusätzlich die Parameter  $t_0$  und  $t_1$  variiert werden. Dies kann vermieden werden, indem zu einer gegebenen Koppelkurve ein Geradführungsreich bestimmt wird, der den/die verlangten Kennwert(e) liefert. Es stellt sich also die Frage, wann ein solcher Geradführungsreich existiert und ob er eindeutig ist. Darüber hinaus kann auch ein Kennwert (beispielsweise die Geradführungslänge) gegeben und derjenige Geradführungsabschnitt gesucht sein, für den ein anderer Kennwert (z.B. die Güte) optimal ist. In den folgenden Abschnitten werden die hierzu entwickelten Verfahren exemplarisch dargestellt.

### 3.8.2 Vorgabe eines beliebigen Kennwertes

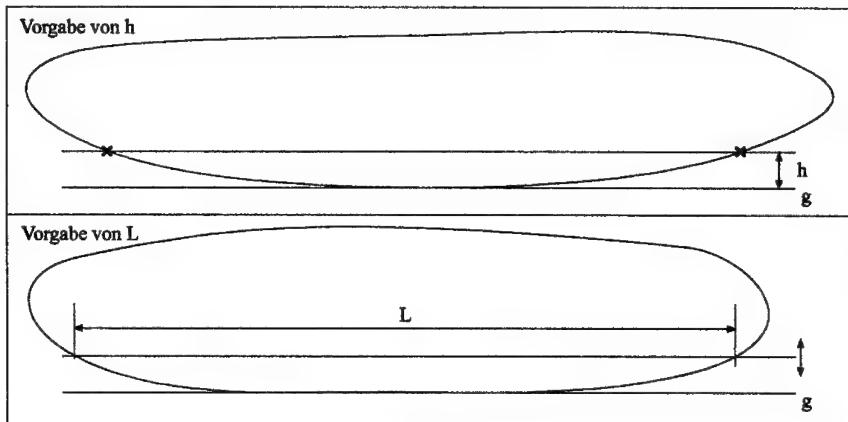


Bild 3.7: Bestimmung des Geradführungsreichs

Bild 3.7 zeigt eine Koppelkurve, die die zu approximierende Gerade g im Punkt P in vier unendlich benachbarten Punkten berührt. Folgende Vorgaben sind in dieser Situation u.a. sinnvoll:

- die zulässige maximale Abweichung h von g
- die Geradführungslänge l
- die Geradführungsgüte q

---

Aufgabe a) kann leicht durch zweimalige Nullstellenbestimmung der Funktion  $f(t) = y(t) - h$  gelöst werden. Geometrisch entspricht dies der Bestimmung der Schnittpunkte der zu  $g$  parallelen Geraden (gestrichelt gezeichnet) mit Abstand  $h$  mit der Koppelkurve.

Wenn die Koppelkurve nicht symmetrisch ist, können Anfangs- und Endpunkt der GF von P unterschiedliche Abstände haben. In diesem Fall kann zur Lösung von b) Eindeutigkeit beispielsweise durch die Forderung, gleichzeitig die Güte zu optimieren, erreicht werden. Geometrisch entspricht dies einer Verschiebung des Toleranzschlauches, bis die nach a) ermittelten Schnittpunkte gerade den vorgegebenen Abstand  $l$  haben. Programmtechnisch ist also das Nullstellenverfahren zweifach verschachtelt anzuwenden. Für c) ist offenbar das gleiche Verfahren verwendbar.

Wenn die Koppelkurve jedoch Wendepunkte hat oder die Funktion  $y(t)$  mehrere Extrema, so kann es beispielsweise mehrere Gerafführungsbereiche geben, die gleiche Gerafführungsgüte haben. Durch die Berechnung aller Extrema und Wendepunkte (vgl. 3.5) wird ein solcher Fall jedoch erkannt.

### 3.8.3 Optimierung geometrischer Kennwerte bei variabler GF-Richtung

In diesem Abschnitt sei zwar die Koppelkurve fest vorgegeben, aber im Unterschied zum vorigen Abschnitt sei die anzunähernde Gerade nicht bekannt. In diesem Fall können beispielsweise die maximale Abweichung, die Gerafführungslänge oder der Antriebswinkelbereich vorgegeben werden. Mit den entwickelten Verfahren können also beliebige Koppelkurven untersucht werden, um festzustellen, ob sie Bereiche enthalten, die für Gerafführungszwecke nutzbar sind. Zur Vereinfachung wird die Koppelkurve hier nicht kontinuierlich, sondern in endlich vielen Punkten betrachtet.

Bild 3.8 zeigt, wie zu einer gegebenen Anzahl von Punkten diejenige Gerade bestimmt wird, bei der der maximale Abstand von den gegebenen Punkten minimal ist. Der zugrunde liegende Algorithmus entspricht prinzipiell dem Simplex-Verfahren der linearen Optimierung. Die Ecken, die sich beim Simplex-Verfahren geometrisch als Schnittpunkt der Hyperebenen ergeben, welche die Nebenbedingungen beschreiben, sind hier durch die Indizes der die Alternante charakterisierenden Punkte bestimmt. Diese Äquivalenz von Optimierung bezüglich der Maximumsnorm und linearer Optimierung ergibt sich mathematisch aus der Dualitätstheorie [St60, We91, BS84] und kann möglicherweise auch auf andere Bereiche der Getriebeoptimierung angewandt werden. Der Vorteil dieses Verfahrens liegt darin, daß im Gegensatz zu anderen Optimierungsverfahren das exakte Optimum in einer endlichen Anzahl

von Schritten bestimmt werden kann.

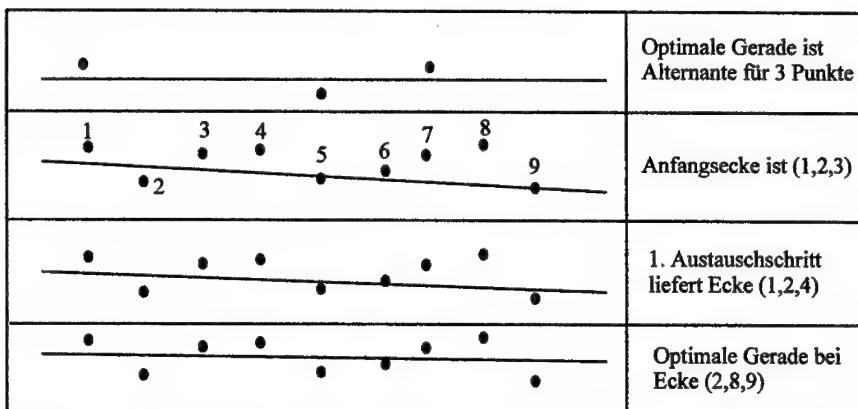


Bild 3.8: Austauschverfahren zur Bestimmung einer optimalen Geraden

Ist nun beispielsweise der Antriebswinkel  $\varphi_g$  für den GF-Bereich vorgegeben, so kann durch mehrfache Anwendung dieses Verfahrens eine optimale Geradführungsstrecke bestimmt werden: Zunächst berechnet man die Koppelkurve in einer genügend großen Zahl N von Punkten.  $n = N\varphi_g / 360^\circ$  aufeinanderfolgende Punkte entsprechen dann gerade dem Antriebswinkelbereich  $\varphi_g$ . Zunächst wird nun die optimale Gerade für die Punkte  $\{1, \dots, n\}$  bestimmt, dann für die Punkte  $\{2, \dots, n+1\}$  u.s.w., bis man wieder bei den ersten n Punkten angekommen ist. Dieses zyklische Verfahren gewährleistet, daß die zuletzt bestimmte Gerade auch für den nächsten Kurvenabschnitt eine gute Startlösung ist und ist daher sehr schnell. Die beste dieser optimalen Geraden ist die gesuchte Geradführungsstrecke. Mit ähnlichen Verfahren konnten auch folgende Probleme gelöst werden:

- gegeben ist neben der Koppelkurve eine maximal zulässige Abweichung, gesucht eine Geradführung maximaler Länge
- gegeben ist die Geradführungslänge; gesucht ist eine GF mit minimaler Abweichung von der Koppelkurve.

Abschließend sei noch bemerkt, daß der Übergang von der diskreten Problemstellung mit endlich vielen Koppelpunkten zur kontinuierlichen Kurve durch eine Variation von 3 Parametern  $t_i$  statt der Variation der Indizes  $I_1, I_2$  und  $I_3$  gelöst werden kann. Dies entspricht dann im wesentlichen einer Variation der Genaupunkte (bzw. der "Ungenaupunkte"), die bereits für getriebetechnische Optimierungsaufgaben erfolgreich genutzt wurde [BL91, Lü91, 92].

### 3.9 Auswahl von Prinziplösungen und Kennwerten

Die folgende Tabelle zeigt entsprechend der Einteilung von Geradführungsaufgaben in Abschnitt 2.6, welche Prinziplösungen aus Bild 1.3 für die in den vorigen Kapiteln dargestellten Beispiele geeignet sind und welche der Kennwerte aus den Tabellen in Abschnitt 3.7 besonders wichtig sind.

Beispiel	Geradführungsaufgabe					Lösung			
	Übertragungsfunktion	Aktive GF	Ebenen-Führung	Ganze Koppelkurve wird durchlaufen	Anzahl der GF-Abschnitte		mögliche Prinziplösungen		wichtige Kennwerte
					Vollständige GF	1	2	Ein Viergelenkgetriebe	
Wippkran	●					●		●	$q, d^*, b, \bar{\mu}_{\min}, \bar{\psi}, \alpha_{\max}$
Schreitmaschine	●	●	●	●		●		●	$q, \bar{d}, \bar{\mu}_{\min}, \alpha_{\max}, \delta_v^*, y'_{\max}$
Werkstückbearbeitung waagerecht	●	●	●	●	●			●	$d, b, \Delta_x$
Werkstückbearbeitung senkrecht	●	●	●	●		●		●	$q, d, b, a^*, \Delta_{xy}$
Abfüllmechanismus	●	●		●		●		●	$d, b, \bar{\psi}, \Delta_{xy}$
Schieben	●	●		●	●	●		●	$q, b$
Greifen	●	●	●	●	●	●		●	$q, d, \bar{d}, b$
Einschubmechanismus	●	●	●	●	●	●		●	$q, d, \bar{d}, b$
Malteserkreuzgetriebe	●		●			●	●		$q, a^*, y'_{\max}$
Führung einer Kreissäge					●		●		$q, \bar{d}, \bar{b}, \psi, \alpha_{\max}$
Antrieb einer Pumpe	●		●	●			●		$q, \bar{d}, b, \bar{\mu}_{\min}$
Lagerung einer Achse					●		●		$q, \bar{d}, \bar{b}, \alpha_{\max}$
Lagefehlerausgleich beim Fügen	●				●			●	$\bar{d}, \bar{b}, \bar{\mu}_{\min}, \alpha_{\max}$
Antrieb eines Mähmessers	●	●		●			●		$q, \bar{d}, \bar{b},$
Parallelgeradführung in Nähmaschinen	●	●	●	●	●			●	$q, b, a^*, y'_{\max}$

Tabelle 3.4: Auswahl der Kennwerte in Abhängigkeit von der Geradführungsaufgabe

---

Dabei sind im linken Teil nicht alle denkbaren Kombinationen möglich. Da hier die Führungsaufgabe betrachtet wird, sind Viergelenke mit einem Zweischlag zur Lösung einer zusätzlichen Übertragungsaufgabe in der Spalte „Ein Viergelenkgetriebe“ aufgeführt. Bei den Prinziplösungen wurden jeweils die einfachsten Getriebe gewählt: Natürlich kann jede Aufgabe, die mit einem Viergelenkgetriebe gelöst werden kann, auch mit Getrieben mit höheren Koppelkurven gelöst werden, die im Bild 1.3 unter 8, 9 und 10 aufgeführt sind. In den Spalten für mögliche Prinziplösungen wurden diese drei Einträge zusammengefaßt.

## 4 Geradführungsgtriebe mit symmetrischer Koppelkurve

### 4.1 Systematik

Symmetrische Koppelkurven werden von symmetrischen Viergelenkgetrieben und den nach dem Satz von Roberts zu ihnen äquivalenten gleichschenkligen Getrieben erzeugt. Diese können durch Normierung des Gestells durch die beiden Parameter  $\lambda_1 = \overline{A_0 A} / \overline{A_0 B_0}$  und  $\lambda_2 = \overline{AB} / \overline{A_0 B_0}$  parametrisiert werden [STo85, GaTo88]. Statt  $\lambda_2$  kann auch der Parameter  $\lambda_3 = \sqrt{\lambda_2^2 - (1 - \lambda_1)^2} / 4$  verwendet werden, um die Darstellung in Nomogrammen zu verbessern. Geometrisch ergibt er sich als Abstand des Punktes A zum Gestell in der Steglage des Antriebs.

Da der Koppelpunkt für ein symmetrisches Viergelenk auf der Mittelsenkrechten der Koppel gewählt werden muß, um eine symmetrische Koppelkurve zu erzeugen, hat man (nach Wahl der Gestellpunkte) drei Freiheitsgrade zur Wahl eines geeigneten Getriebes. Wählt man das Koordinatensystem so, daß y die Symmetrieachse ist, so existieren einfache rationale Parametrisierungen der Koppelkurve, die insbesondere die Untersuchung der y-Koordinate, also der Abweichung von g, vereinfachen [Ca64]. Die Symmetrie von Koppelkurven kann prinzipiell auf vierlei Weise zur Vereinfachung der Synthese von Geradführungen genutzt werden:

- a) Beide Symmetrielagen werden als Mittelpunkt von Geradführungen gewählt, die jeweils senkrecht auf der Symmetrieachse stehen. So erhält man Parallelgeradführungen (Bild 4.6).
  - b) Eine Symmetrielage ist Mittelpunkt der Geradführung (Bild 1.2 d).
  - c) Ein Sonderfall von b) entsteht, wenn die gesamte Koppelkurve als Geradführung genutzt werden kann; man spricht dann von geschlossenen Geradführungen (Bild 2.7).
  - d) Keine Symmetriestellung ist Mittelpunkt einer Geradführung. In diesem Fall gibt es zwei Geradführungsbereiche, die bei Spiegelung an der Symmetrieachse in den jeweils anderen Bereich übergehen (Bild 1.2 a und b).
- c) wurde bereits in [GaTo88] ausführlich untersucht. Koppelkurven vom Typ d) mit  $\Delta$  oder 8-förmiger Koppelkurve wurden intensiv von Dijksman [Di76] untersucht, Optimierungen hinsichtlich der hier betrachteten Kennwerte wurden aber noch nicht durchgeführt; sie erwiesen sich als algebraisch wesentlich komplizierter als für symmetrische Koppelkurven, deren Geradführungsrichtung senkrecht zur Symmetrieachse steht, da ein natürlicher GF-

Winkel nicht existiert<sup>6</sup>, und da eine einfache Parametrisierung der Koppelkurve in problemorientierten Koordinaten nicht möglich ist.

In den folgenden Abschnitten werden die Fälle a) und b) betrachtet, da sie sich mit einheitlichen algebraischen Methoden behandeln lassen. Dabei wird insbesondere auf die Optimierung der Geradführungsgüte bei vorgegebener Breite der Koppelkurve und Geradführungslänge eingegangen; dies entspricht der Vorgabe des Platzbedarfskennwertes  $b$  (vgl. Abschnitt 3.7).

## 4.2 Algebraische Syntheseverfahren

In diesem Abschnitt werden die vom Autor und anderen Mitarbeitern am Institut entwickelten Verfahren zur algebraischen Synthese von symmetrischen Geradführungen [GaTo88, STo85, To89, FeSTo] kurz zusammengefaßt und bewertet. Bild 4.1 zeigt die verwendeten Bezeichnungen für die symmetrische Doppelschwinge:

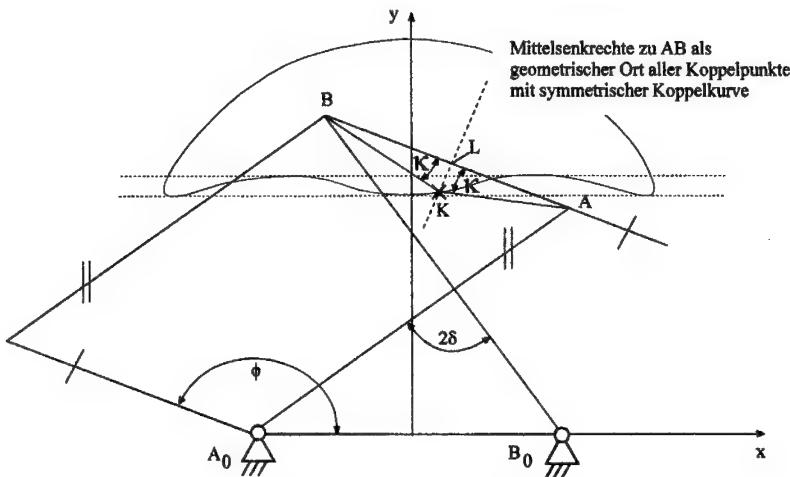


Bild 4.1: Bezeichnungen für die symmetrische Doppelschwinge

Um eine symmetrische Koppelkurve zu erzeugen, muß der Koppelpunkt  $K$  auf der Mittelsenkrechten zu  $AB$  liegen. Er kann daher entweder durch den Winkel  $\kappa$  oder den Abstand  $c = \overline{KL}$  mit  $L = (A+B)/2$  bestimmt werden. Zur Abkürzung werden folgende Bezeichnungen verwendet:

<sup>6</sup> Bei 8-förmigen Koppelkurven mit genau 2 Wendepunkten werden die Tangenten an diese Punkte in der Regel als zu approximierende Gerade gewählt. Diese Tangente ist aber nicht optimal im Hinblick auf die Geradführungsgüte.

$$a = \overline{A_0 B_0} / 2$$

$$b = \overline{AB} / 2$$

$$r = \overline{A_0 A}$$

Der halbe Polwinkel  $\delta$  ist eine Hilfsgröße zur einfachen Parametrisierung der Koppelkurve, der folgende Beziehung erfüllt:

$$r^2 \sin^2 \delta = a^2 + b^2 - 2ab \cos \phi \quad (4.1)$$

Form des Geradführungsabschnitts der Koppelkurve	Bezeichnung	Parameter	natürliche Geradführungs-länge ist gegeben
	Sechspunktscheitel-tangente	$\lambda_1$	-
	Dreipunktdoppel-tangente	$\lambda_1$	✓
		$\lambda_2$	
	Vierpunktscheiteltangente und Doppeltangente	$\lambda_1$	✓
		$\lambda_2$	
	Tschebyscheff-Chaharkteristik	$\lambda_1$	✓
		$\lambda_2$	
	Geschlossene Geradführung	$\lambda_1$	✓
	Parallel-Geradführung	$0 < \lambda_1 < 0,7$	-
	Genaupunktlage wie beim Tschebyscheff-Polynom	$\lambda_1$	✓
	Äquidistante Genaupunkte	$\lambda_1$	✓

**Tabelle 4.1:** Geradführungscharakteristiken symmetrischer Koppelkurven durch Vorgabe von Bedingungen an die y-Koordinate (nach [STo85])

Damit gelten für die Koordinaten des Koppelpunktes folgende Beziehungen:

---


$$x = (b \cot(\delta) + c) \sin(\phi) \quad (4.2a)$$

$$y = a \cot(\delta) - (b \cot(\delta) + c) \cos(\phi) \quad (4.2b)$$

Nach Elimination von  $\phi$  mit Gleichung 4.1 und der Substitution  $u = \cot(\delta)$  erhält man eine Rationalisierung der Gleichung 4.2b in Form folgender kubischer Gleichung:

$$a_3 u^3 + a_2 u^2 + a_1 u + a_0 = 0 \quad (4.3)$$

Die Koeffizienten sind dabei lineare Funktionen von  $y$ :

$$a_3 = b(a - b^2)$$

$$a_2 = -c(a - b^2) - 2aby$$

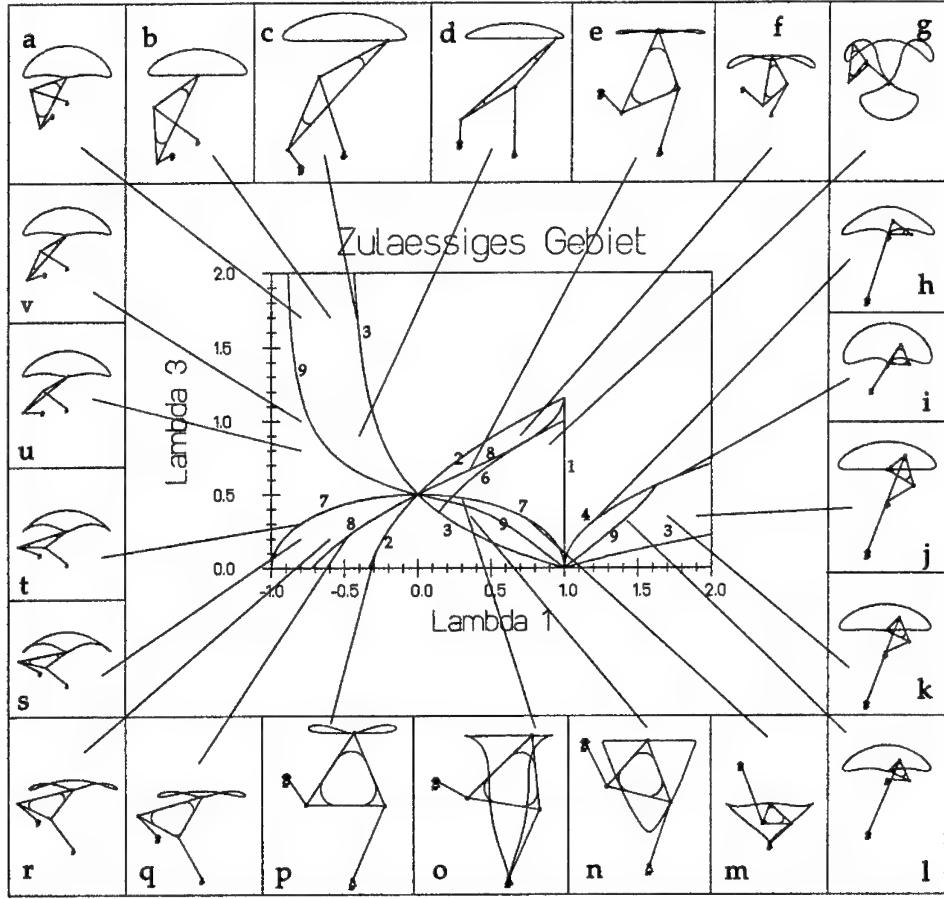
$$a_1 = b(a^2 - b^2 + r^2)$$

$$a_0 = -c(a^2 + b^2 + r^2) - 2aby$$

Diese kubische Gleichung für  $y$  ermöglicht es, die sich aus den in Tabelle 4.1 schematisch dargestellten Geradführungscharakteristiken ergebenden Gleichungen algebraisch zu lösen [STo85]. Die Charakteristiken sind durch waagerechte Tangenten oder Schnittpunkte mit der Sollgeraden definiert, wobei bis auf die beiden letzten Zeilen die  $x$ -Komponente der Koppelkurve für die Synthesegleichungen keine Rolle spielt.

Die Anzahl der Freiheitsgrade hängt dabei von der Anzahl der Bedingungen ab. Der Vergleich der verschiedenen Charakteristiken ergab folgendes Ergebnis:

- In der Regel ist die Güte von Tschebyscheff-Geradführungen (TGF) bei gleichem vorgegebenen Platzbedarf am besten. Diese sind dadurch charakterisiert, daß alle 6 Extremwerte von  $y(t)$  im Geradführungsbereich den gleichen Betrag haben, die Koppelkurve also im Geradführungsbereich innerhalb des Toleranzbandes der Breite  $h$  oszilliert; man spricht auch von Koppelkurven mit vollständig ausgeglichener Fehlercharakteristik (Bild 4.1).
- Verwendet man sogenannte Vergleichsbewegungsgesetze, (d.h. Polynome, die die gleiche Charakteristik aufweisen, beispielsweise Tschebyscheff-Polynome), so ergeben sich quantitativ ähnliche Beziehungen insbesondere bei den Extrema der Ableitungen 0. bis 2. Ordnung wie für die Koppelkurven
- Wenn die Tschebyscheff-Geradführung rückläufig ist, sind Geradführungen mit Dreipunktdoppeltangente vorzuziehen



**Bild 4.2:** Übersicht über Tschebyscheff-Geradführungen [Fu94]

- Bei expliziter Vorgabe der Genaupunkte ist die Verwendung der Genaupunktlage wie beim Tschebyscheff-Polynom vorzuziehen

Tschebyscheff-Geradführungen haben eine große Formenvielfalt (Bild 4.2) und ermöglichen durch die Variation zweier Parameter die Anpassung an vorgegebene Randbedingungen. Diese kann interaktiv durch Digitalisieren in einem Nomogramm erfolgen [To89].

Bild 4.2 zeigt aber auch, daß viele Bereiche der  $\lambda_1$ - $\lambda_3$ -Ebene zu Geradführungen sehr ungünstiger Form und schlechter Güte führen (Beispiele dafür sind die Koppelkurven s, t, g u.a. in Bild 4.2). In Abschnitt 4.3.2 wird dieses Phänomen genauer untersucht, und für solche Bereiche werden neue Geradführungscharakteristiken mit höherer Güte definiert.

Entsprechend der Beschränkung auf die y-Koordinate bei der Aufstellung der

Synthesegleichungen kann mit dem beschriebenen weder eine gute Geschwindigkeitskonstanz noch geringe Querbeschleunigung erreicht werden. Daher wurde versucht, auch für Geschwindigkeit und Beschleunigung eine ausgeglichene Fehlercharakteristik zu erzielen. Allerdings muß die Abweichung von der Sollgeraden immer berücksichtigt werden, da sonst die Geradführungsgüte sehr schlecht wird. Daher kombiniert man Vorgaben für  $y(u)$  entsprechend Tabelle 4.1 mit ähnlichen Vorgaben für  $y''(u)$  bzw.  $x'(u)$ . Dadurch erhält man einerseits wesentlich kompliziertere Gleichungen, die teilweise nur numerisch zu lösen sind und andererseits zwei unterschiedlich lange Geradführungsbereiche: einen für die  $y$ -Charakteristik und einen für  $y''(u)$  bzw.  $x'(u)$ . Man erhält also Koppelkurven, die auch außerhalb des Bereichs der Geschwindigkeitskonstanz innerhalb des Toleranzbandes für die Abweichung verlaufen oder bei denen umgekehrt der Bereich der Geschwindigkeitskonstanz kürzer ist als die Geradführungs-länge. Dies bedeutet jedoch, daß in der Regel eine der verwendeten Synthesegleichungen zur Erzwingung einer ausgeglichenen Charakteristik in einem Punkt außerhalb des Geradführungsbereichs erfüllt wird und daher die *Gestalt der Koppelkurve beeinflußt ohne eine Verlängerung der Geradführung zu bewirken*. Solche Koppelkurven sind i.a. nicht optimal, da ein freier Parameter verschenkt wird. Durch zusätzliche Gleichungen kann aber erreicht werden, daß diese Geradführungsbereiche gleich lang sind; dies erfordert jedoch einen hohen *algebraischen* (Fallunterscheidungen, Ableitungen, Elimination u.s.w.) *und numerischen* Aufwand, während die rein numerischen Verfahren im nächsten Abschnitt einheitlich für alle Kennwerte durchgeführt werden können.

Insgesamt ist kein befriedigendes algebraisches Verfahren zur Synthese von symmetrischen Geradführungen bekannt, die sowohl im Hinblick auf die Geradführungsgüte, als auch im Hinblick auf hohe Geschwindigkeitskonstanz oder geringe maximale Querbeschleunigung gute Kennwerte haben.

### 4.3 Numerische Synthese von symmetrischen Geradführungen

Die entwickelte Methode beruht auf der geeigneten Wahl der vorgegebenen bzw. zu optimierenden Parameter. Wegen der geringen Zahl der letzteren war eine vollständige Durchsuchung des Lösungsfeldes möglich. Das optimale Getriebe hat für die untersuchten Kennwerte in der Regel eine ausgeglichene Fehlercharakteristik, die so quasi experimentell ermittelt wurde und dann in ein nichtlineares Gleichungssystem umgesetzt werden kann. Dies wird durch Betrachtung der Parametrisierung der Koppelkurve und Einführung jener Parameter  $t_i$ , erreicht, die die Schnitt- oder Berührpunkte der Koppelkurve mit den Begrenzungsgeraden der Abweichung  $y(t)$  bzw. der Geschwindigkeit  $x'(t)$  angeben.

---

Auch Geradführungen mit Geschwindigkeitskonstanz wurden mit Hilfe des Alternantensatzes berechnet. Ein erster Ansatz bestand in der Verkleinerung der GF-Länge so, daß die x-Geschwindigkeit in der Mitte der GF den gleichen Wert wie am Ende hat. Allerdings sind diese Getriebe dann für den ermittelten Wert  $\delta_v$  nicht mehr optimal im Hinblick auf die Güte, denn die Koppelkurve liegt im wegfällenden GF-Abschnitt noch im Toleranzschlauch, vergrößert jedoch ähnlich wie bei rückläufigen GF die nutzbare GF-Länge nicht. Dieses Problem konnte durch Variation von  $\lambda_2$  mit dem Ziel, die wegfallende Länge verschwinden zu lassen, gelöst werden. Als äquivalent zu dieser Bedingung erwies sich die Optimierung einer gewichteten Zielfunktion

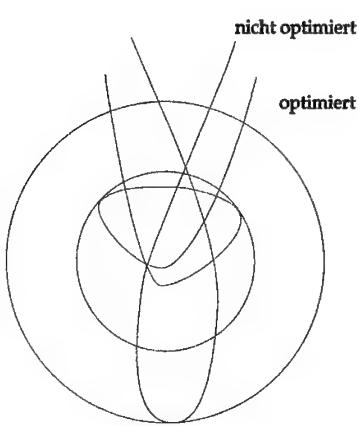
$$f = c_1 q + c_2 \delta_v$$

oder auch die Optimierung von  $\delta_v$  bei Vorgabe von q.

Die in Tabelle 3.3 definierten Kennwerte  $\Delta_x$  und  $\Delta_{xy}$  beschreiben nicht die Geschwindigkeitskonstanz, sondern den maximalen Abstand von einer gleichmäßigen Bewegung. Nach Optimierung dieser Kennwerte weisen die zu ihrer Definition verwendeten Funktionen  $\delta_x(t)$  und  $\delta_{xy}(t)$  (vgl. Tabelle 3.1) im Geradführungsbereich eine vollständig ausgeglichene Fehlercharakteristik auf, wenn man die Relativbewegung in Polarkoordinaten beschreibt.

Zur Verdeutlichung dieser Aussage ist in Bild 4.3 die zur Definition von  $\delta_{xy}(t)$  verwendete Kurve  $\vec{\delta}_{xy}(t) := (x(t) - \bar{v}t, y(t))$  sowohl für das Ausgangsgetriebe als auch für das optimierte Getriebe dargestellt. Sie ist die Ortskurve des Koppelpunktes in der mit der Durchschnittsgeschwindigkeit  $(\bar{v}, 0)$  bewegten Ebene. Die ausgeglichene Fehlercharakteristik ist daran erkennbar, daß  $\vec{\delta}_{xy}(t)$  den Kreis mit Radius  $\Delta_{xy}$  im GF-Bereich zweimal berührt und ihn im Anfangs- bzw. Endpunkt der Geradführung schneidet. Daher kann man von einem Toleranzkreis anstelle eines Toleranzbandes sprechen.

Die für Bild 4.3 vollzogene Koordinatentransformation hat für die Führung eines Abfüllers oberhalb einer bewegten Flasche praktische Bedeutung. Der Toleranzkreis muß kleiner sein als der Innendurchmesser der Flasche, wobei der Durchmesser des Füllrohres noch zu berücksichtigen ist.



Das Bild zeigt beide Koppelkurven relativ zur Sollbewegung (konstante Geschwindigkeit)

Die optimierte Koppelkurve berührt den kleineren Toleranzkreis in 2 Punkten. Dieser Toleranzkreis wird bei Transformation in ein Polarkoordinatensystem zu einem Toleranzband.

**Bild 4.3:** Toleranzkreis  $\tilde{\delta}_{xy}(t)$  für Koppelkurve mit angenäherter Geschwindigkeitskonstanz (Minimierung von  $\Delta_{xy}$ )

#### 4.3.1 Optimalität von Tschebyscheff-Geradführungen

Der Alternantensatz von Tschebyscheff besagt allgemein, daß ein Polynom  $f$  vom Grad  $n$  genau dann eine optimale Approximation der stetigen Funktion  $g$  auf einem gegebenen Intervall  $[a,b]$  ist, wenn die Differenzfunktion  $f(x) - g(x)$  den maximalen Abstand  $d = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$  in genau  $n+2$  Punkten mit alternierendem Vorzeichen annimmt [BS84, CW71]. Erfüllen die Gliedlängen des symmetrischen Viergelenks gewisse Randbedingungen, so gibt es in jeder der beiden Symmetriestellungen einen Koppelpunkt, dessen Koppelkurve eine solche GF durchläuft. Gemäß der Theorie der am wenigsten von 0 abweichenden Funktionen ist dann für den nach den Tschebyscheffschen Formeln berechneten Geradführungswinkel  $\phi_g$  die Abweichung  $h$  für diese Koppelkurve kleiner als für alle anderen Koppelkurven zu dem gegebenen Viergelenk, die den gleichen Geradführungswinkel  $\phi_g$  haben. Über die Optimalität hinsichtlich der Güte kann zunächst nichts gesagt werden, da diese auch von der Geradführungslänge, also der  $x$ -Koordinate der Koppelkurve, abhängt, die für die Betrachtung der Tschebyscheff-Charakteristik keine Rolle spielt. Tatsächlich ist es sinnlos, nach einem Getriebe absolut minimaler Güte  $q$  zu fragen, wenn  $\phi_g$  nicht vorgegeben ist, denn wenn der Geradführungsbereich nur beliebig klein gemacht wird, wird auch  $q$  beliebig klein. Da es jedoch zu jedem vorgegebenen Geradführungswinkel  $\phi_g$  unter allen symmetrischen Koppelkurven eine gibt, die optimal bezüglich  $q$  ist, ist nicht sofort klar, worin die Optimalität von TGF besteht. Bedenkt man, daß die Theorie der am wenigsten von 0 abweichenden Funktionen eben für Funktionen, also nicht für (Koppel-) Kurven, bei denen die Zuordnung  $x \rightarrow y$  nicht eindeutig ist, entwickelt wurde, so wird deutlich, daß TGF

allenfalls lokal optimal in Bezug auf die GF-Güte  $q$  sein können und auch dies nur, wenn die Koppelkurve im Geradführungsbereich nicht rückläufig ist, also immer  $x'(t) \neq 0$  gilt und damit die Koppelkurve im Geradführungsbereich eine *Funktion* ist. Tabelle 4.2 zeigt Prinzipskizzen einer lokal-optimalen und zweier nicht optimaler TGF. Dabei wurden ausgehend vom GF-Mittelpunkt M folgende Punkte eingezeichnet:

Koppelkurvencharakteristik	Reihenfolge
	1-2-3-4
	1-2-4-3
	1-4-2-3
optimierte Koppelkurvencharakteristik	Synthesebedingung
	$P_3 = P_4$
	$P_2 = P_4$

**Tabelle 4.2:** Schematische Darstellung der Charakteristiken von optimierten Tschebyscheff-Geradführungen

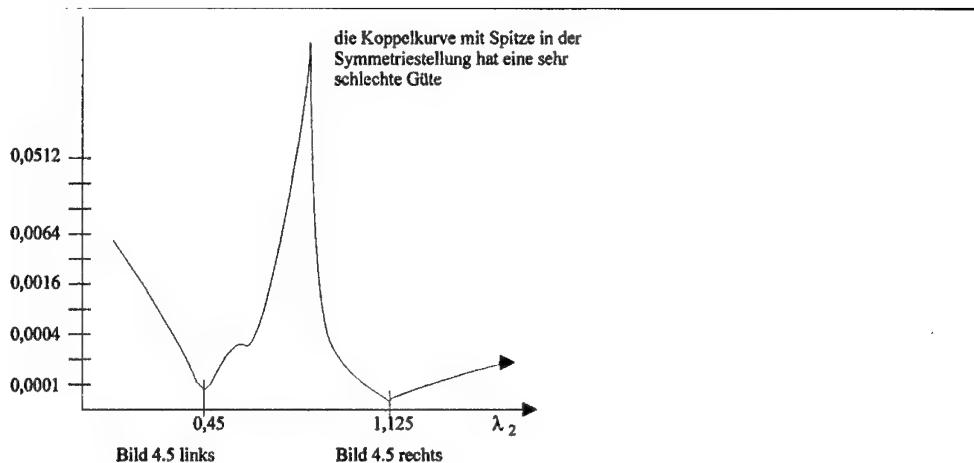
- $P_1$  der Berührpunkt der Koppelkurve mit der unteren Begrenzungsgeraden  $g_2$
- $P_2$  der Koppelpunkt, der die gleiche Begrenzungsgerade  $g_1$  berührt wie M
- $P_3$  der Endpunkt der GF (Schnittpunkt von  $g_2$  mit der Koppelkurve)
- $P_4$  der Koppelpunkt mit maximalem x-Wert.

Bei nicht rückläufigen Tschebyscheff-Geradführungen werden diese Punkte in der durch die Indizierung gegebenen Reihenfolge durchlaufen (oben); in diesem Fall ist die GF lokal optimal. Bei rückläufigen TG gilt  $t_4 < t_3$  (zweite Kurve). Man kann dann die Alternantenbedingung durch die Gleichung  $t_4 = t_3$  ersetzen und erhält die obere "optimierte" Charakteristik, bei der nun  $P_2$  natürlich nicht mehr auf  $g_1$  liegt. Bei rückläufigen TG mit Doppelpunkt im GF-Bereich ist  $t_4 < t_2$  (Kurve 3), daher wurden Koppelkurven mit  $t_4 = t_2$  untersucht. Dies sind gerade Koppelkurven mit Spitzen, da sowohl die Ableitung nach x, als auch die Ableitung nach y verschwindet. [Solche Koppelkurven haben eine höhere Güte als das Ausgangsgetriebe, aber sie sind immer noch deutlich schlechter als die Koppelkurve des Ballschen Punktes in der Symmetriestellung.]

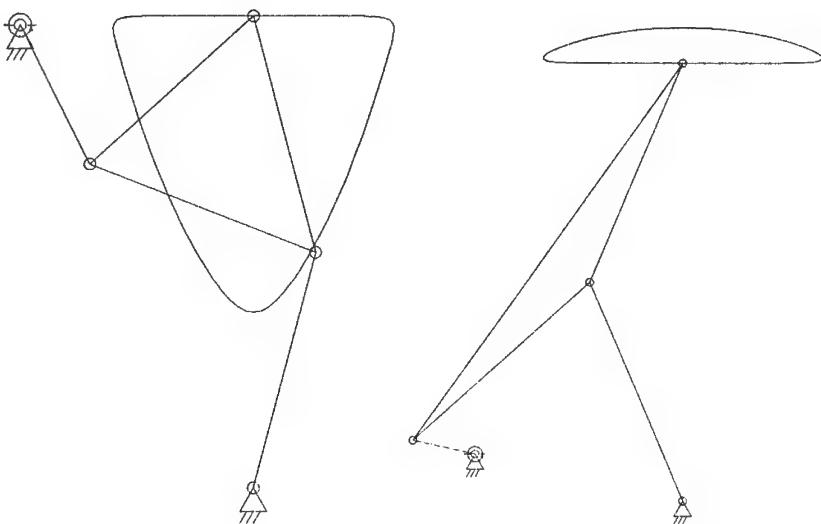
Daher wurden andere Parameter zur Optimierung verwendet: Statt ausgehend von einem durch  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  gegebenen Gelenkviereck einen optimalen Koppelpunkt zu bestimmen, wurden  $\lambda_1$  und der Kennwert b, also das Verhältnis von Koppelkurvenbreite und GF-Länge, vorgegeben. Da bei vorliegender Koppelkurve aus b der Geradführungsabschnitt und damit die Güte berechnet werden kann (vgl. Abschnitt 3.8), kann nun  $\lambda_2$  variiert werden, um die Güte (oder beliebige andere Kennwerte) zu optimieren. Bild 4.4 zeigt, daß für  $\lambda_1=0.3$  und  $b=5/3$  die Güte als Funktion von  $\lambda_2$  zwei Extrema hat. Beide erwiesen sich als TGF (Bild 4.5). Durch Variation von  $\lambda_1$  und b erhält man ein Lösungsfeld, welches jene TGF enthält, die nicht rückläufig sind. Soll zu einem vorgegebenen symmetrischen Viergelenk, welches nicht in diesem Feld auftritt, eine Geradführung bestimmt werden, so sollten zunächst GF mit vier unendlich benachbarten Genaupunkten betrachtet werden.

### 4.3.2 Parallelgeradführungen

Zu jeder Lage eines beliebigen Viergelenks liefert der Ballsche Punkt eine Koppelkurve mit vierpunktiger Geradführung. Für symmetrische Getriebe in Parallellage liegt dieser auf der Mittelsenkrechten der Koppelkurve. Sind  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  gegeben, so erhält man mit den folgenden Formeln den Basiswinkel  $\kappa$  des Koppeldreiecks:



**Bild 4.4:** Optimierung der Geradführungsgüte



**Bild 4.5:** Optimale Getriebe für die Werte  $\lambda_2 = 0,45$  und  $\lambda_2 = 1,125$  aus Bild 4.4

$$u = \frac{1 - \lambda_1}{\sqrt{\lambda_2^2 - (1 - \lambda_1)^2}} \quad \chi = \arctan \frac{1/u + \lambda_1 u}{1 - \lambda_1} \quad (4.4)$$

Für vorgegebenes  $\lambda_1$  existiert genau ein  $\lambda_2$ , so daß die Ballschen Punkte in innerer und äußerer Steglage übereinstimmen; die Koppelkurve hat dann zwei Flachpunkte mit parallelen Tangenten, die beide als GF nutzbar sind (Die Indizes i und a bezeichnen im folgenden diese

beiden GF). Mit den Hilfsgrößen

$$a_0 = -2(1-\lambda_1^2)^3(1+\lambda_1^2) \quad a_1 = (1-\lambda_1^2)^3 - \lambda_1^2(3+\lambda_1^2)(1+3\lambda_1^2) \quad a_2 = -2^2(1+\lambda_1^2)$$

gilt in diesem Fall nach [STo85]  $\lambda_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2} - a_1}{2a_2}}$ . (4.5)

Je nach Anwendungszweck können die Längen der beiden Geradführungsstrecken oder die Gewichtung der Abweichungen durchaus unterschiedlich sein, hier werden jedoch nur Parallelgeradführungen mit gleichen Geradführungslängen betrachtet. Die dargestellten Optimierungsmethoden können auf den allgemeinen Fall übertragen werden, indem statt b Werte  $b_1$  und  $b_2$  für beide GF-Bereiche vorgegeben werden.

Da kein natürlicher GF-Bereich existiert, wurden im oben genannten Aufsatz keine Kennwerte angegeben. Nach Vorgabe von b können entsprechend 3.8 zu jeder Koppelkurve zunächst beide GF-Bereiche ermittelt und dann die in 3.7 definierten Kennwerte berechnet werden. Im folgenden Nomogramm (Bild 4.6) werden Kennlinien für die Güte  $q_i$  der der inneren Steglage zugeordneten GF (Beschriftung rechts) und für  $d$ , also der relativen Dicke der Koppelkurve (Beschriftung oben und innen), in Abhängigkeit von  $\lambda_1$  und  $b$  dargestellt. Obgleich die Koppelkurve mit 2 Flachpunkten bereits durch einen Parameter, nämlich  $\lambda_1$  bestimmt ist, ist die Geradführungsstrecke erst durch den Kennwert  $b$  gegeben, so daß zur Darstellung ein Nomogramm verwendet werden kann. Dieses ermöglicht beispielsweise die Vorgabe der Kennwerte  $q$  und  $b$ , also der Geradführungsgüte mit der für den Platzbedarf wesentlichen Breite der Koppelkurve. Beispielsweise liest man ab, daß für  $q=0,0001$  und  $b=2$   $\lambda_1=0,05$  gilt und die Dicke der Koppelkurve  $d=0,05$  ist.

Die Verwendung eines Kennwerts als Parameter anstelle eines Getriebeparameters ist aber auch dann sinnvoll, wenn noch beide Parameter  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  vorgegeben werden können, das entsprechende Nomogramm aber nicht ausgenutzt wird. Dies ist auch im Nomogramm für Tschebyscheff-Geradführungen (Bild 4.2) der Fall, welches allerdings verwendet werden muß, wenn beispielsweise nur ein Taschenrechner zur Verfügung steht. Dieser ermöglicht nämlich nach Vorgabe von  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  die genügend genaue Berechnung der fehlenden Getriebemaße, aber nicht umgekehrt. Ein Ablesen der Getriebemaße aus dem Nomogramm ist aber wegen der beschränkten Linienzahl mit Ungenauigkeiten verbunden, die dann wiederum die eigentlich vorgegebenen Kennwerte verändern. Betrachtet man die Güte  $q$  der schlechteren Geradführung, also  $q:=\max(q_i, q_a)$ , so sind diese nach [STo85] berechneten Getriebe nicht optimal. Wie in 3.3 werden daher  $\lambda_1$  und  $b$  vorgegeben und  $\lambda_2$  und  $\kappa$  variiert, um  $q$  zu minimieren. Als Ergebnis dieser Optimierung ergeben sich Koppelkurven, bei denen

die GF-Abweichung in beiden GF-Bereichen übereinstimmt und die Koppelkurve um die jeweils zu approximierende Gerade pendelt.

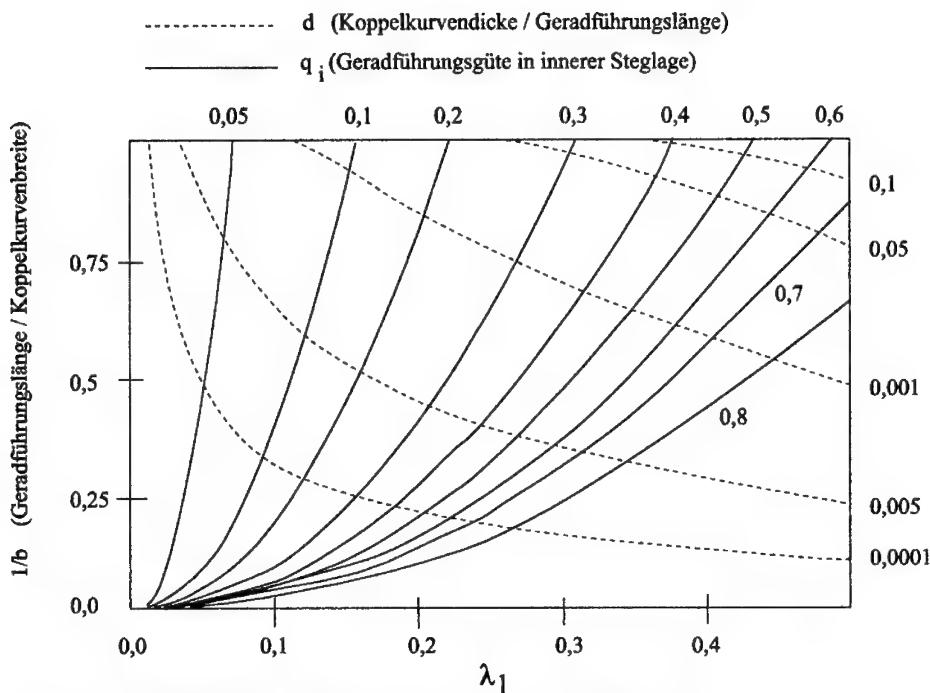
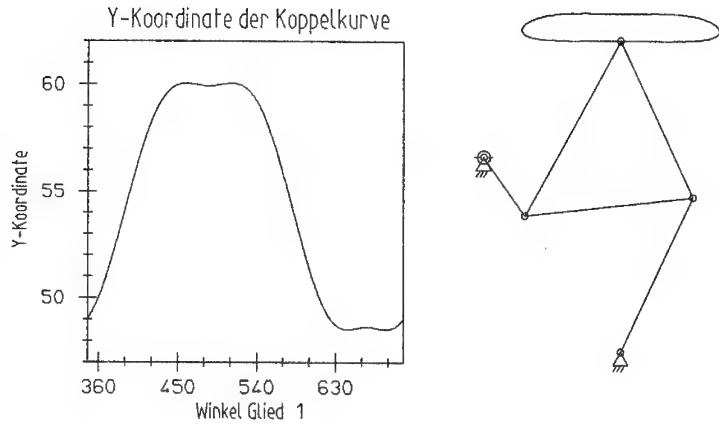


Bild 4.6: Nomogramm für Parallelgeradführungen mit zwei Flachpunkten

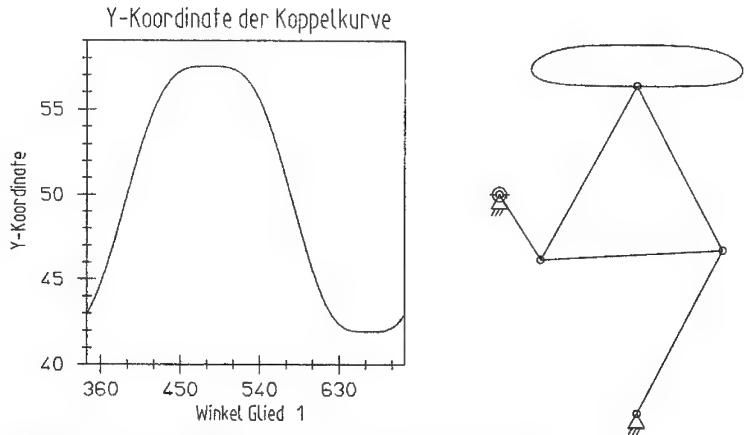
Es handelt sich also im Grunde wieder um Getriebe mit voll ausgeglichener Fehlercharakteristik. Bild 4.7 zeigt ein Beispiel einer solchen GF zusammen mit einem Diagramm der y-Koordinate der Koppelkurve, welches die ausgeglichene Fehlercharakteristik veranschaulicht. Das nächste Bild zeigt die nicht optimierte Koppelkurve mit 2 Ballischen Punkten. In der folgenden Tabelle werden Maße und Güte des dargestellten Getriebes denen einer Parallelgeradführung mit 2 Flachpunkten gegenübergestellt:

Charakteristik	Vorgaben	$\lambda_2$	$\kappa$	$q$
2 Flachpunkte	$\lambda_1=0.3$	0.7155	57.434	0.02178
	$b=2.0$	0.7181	54.383	0.005397

Tabelle 4.3: Verbesserung der GF-Güte durch Optimierung



**Bild 4.7:** Parallelgeradführung mit ausgeglichener Fehlercharakteristik



**Bild 4.8:** Parallelgeradführung mit zwei Ballschen Punkten

Die erhebliche Verbesserung der Güte ist einerseits auf den relativ kleinen Wert von  $b$  und andererseits auf die optimale Wahl von  $k$  zurückzuführen; die Parameter  $\lambda_2$  stimmen auch für andere Werte von  $\lambda_1$  fast überein. Die Lösung wurde durch iterative Verwendung der Programme aus Abschnitt 3.8 in Verbindung mit einem Nullstellenverfahren berechnet.

## 5 Geradführungen mit unendlich benachbarten Punkten

Geradführungen mit 4, 5 oder 6 unendlich benachbarten Genaupunkten wurden in der Literatur bereits ausführlich untersucht (z.B. [Ca57, FP81, Ih66]). In der Regel wird das Getriebe in einer beliebigen Stellung vorgegeben (bei 5 oder 6 unendlich benachbarten Genaupunkten u.U. in Sonderlagen) und dann der Koppelpunkt geometrisch oder algebraisch bestimmt. Unter Ausnutzung der Gleichung von Euler-Savary wurden bisher der Pol sowie Geradführungsmittelpunkt- und Richtung und außerdem Geraden für die Gestellpunkte vorgegeben (vgl. Tabelle 6.1). Bei beiden Methoden können Gestellpunkte, Lage und Richtung der Geradführung nicht gleichzeitig vorgegeben werden. Dies ist auch dann der Fall, wenn als theoretischer Ansatz die Burmestersche Lagengeometrie verwendet wird: werden statt endlich benachbarter unendlich benachbarte Lagen vorgeschrieben, so ergeben sich als Vorgaben Winkelgeschwindigkeiten bzw. Beschleunigungen der Koppel, und die Gestellpunkte ergeben sich als Burmester-Punkte. Nur mit aufwendigen numerischen Methoden können diese konstruktiv wichtigen Größen vorgegeben werden: Ihme, der vierpunktige Geradführungen besonders intensiv untersuchte, verwendete dazu in [Ih91] die numerische Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems mit 9 Unbekannten. Dabei nutzte er die Übertragungsfunktion nullter Ordnung als Nebenbedingung und konnte so von einer einfachen analytischen Darstellung der Koppelkurve ausgehen.

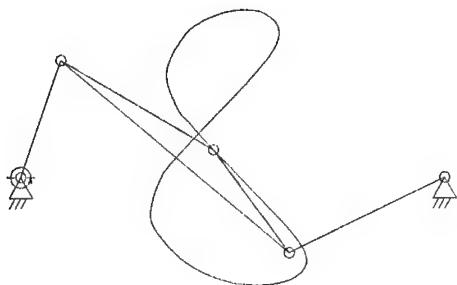


Bild 5.1: Koppelkurve mit zwei Ballschen Punkten

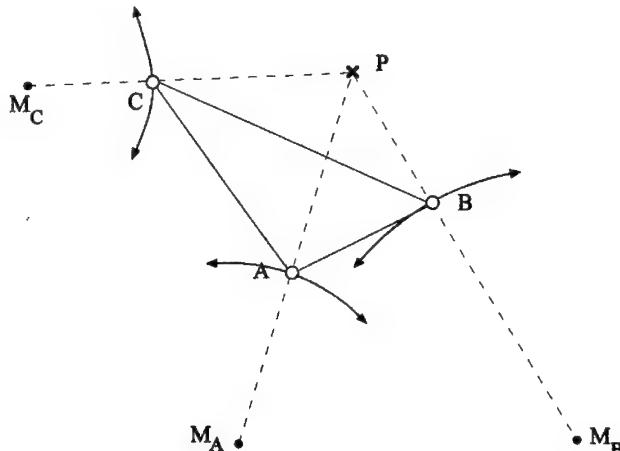
Vierpunktige Geradführungen lassen sich durchaus für anspruchsvolle Aufgaben nutzen, beispielsweise für Geradführungen mit mehreren GF-Abschnitten (Bild 5.1). Die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten von Koppelkurven mit vierpunktigen Geradführungen sind mit den hier entwickelten Verfahren einfacher zu nutzen.

Das vorzustellende Verfahren beruht auf der Auswertung der Gleichungen von Euler-Savary

entsprechend früheren Arbeiten von D. Tesar, J. P Vidusic und J.C. Wolford [Wo60] und wurde in spezieller Form bereits in [Han93] und [FHG94] dargestellt. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie sich mit dem gewählten Ansatz vierpunktige Kreisführungen und Geradführungen für Viergelenke mit Drehgelenken und die Getriebe der Schubkurbelkette einheitlich behandeln lassen und wie zusätzlich ein Koppelpunkt vorgegeben werden kann oder Doppelpunkte bzw. Spitzen erzeugt werden können. Weiterhin wird die Synthese-Gleichung nicht wie bei [Han93] numerisch, sondern algebraisch gelöst. Dadurch können zusätzliche Vorgaben effizienter - nämlich durch Variation eines einzigen Parameters - gelöst werden.

## 5.1 Grundlagen

Bild 5.2 zeigt die momentane Bewegung des Koppeldreiecks ABC und den Pol P.



**Bild 5.2:** Momentane Bewegung des Koppeldreiecks

Die Krümmungsmittelpunkte der Bahnen von A, B und C sind mit  $M_A$ ,  $M_B$  und  $M_C$  bezeichnet. Wählt man zwei dieser 3 Krümmungsmittelpunkte als Gestellpunkte, wird der dritte Punkt eine Koppelkurve beschreiben, die sich dreipunkig an den dritten Krümmungskreis anschmiegt. Ist für alle Punkte der Krümmungsradius lokal konstant, so wird entsprechend eine vierpunktige Berührung vorliegen. Als Spezialfall können ein oder zwei der betrachteten Krümmungsradien als unendlich gewählt werden. Ein Koppelpunkt, dessen Bahnkurve die Krümmung 0 hat, durchläuft einen Wendepunkt, bei lokal konstantem Krümmungsradius eine vierpunktige Geradführung. Wenn nicht für den Koppelpunkt, sondern für den dem Gestell zugeordnetem Kreispunkt die Krümmung verschwindet, so liegt ein Schubantrieb vor. Im folgenden wird zunächst von einem endlichen Krümmungsradius

ausgegangen, da so die Symmetrie der Synthesegleichungen besser zum Ausdruck kommt.

Ziel der folgenden Überlegungen ist die Herleitung von Bedingungen dafür, daß alle drei Punkte A, B und C aus Bild 5.2 Bahnkurven mit stationärem Krümmungsradius durchlaufen. Die direkte Verwendung der kartesischen Koordinaten x,y und ihrer Ableitungen zur Bestimmung der Krümmung entsprechend [Han93, Kapitel 5] ermöglicht nicht die Ausnutzung der Gleichartigkeit der Gleichungen für diese drei Punkte. Durch Verwendung des Pols ist dies mit der Gleichung von Euler-Savary möglich. Die Bewegung einer Ebene (z.B. eines Getriebegliedes) kann durch das Wälzen der Gangpolbahn  $K_g$  auf der Rastpolbahn  $K_r$  dargestellt werden:

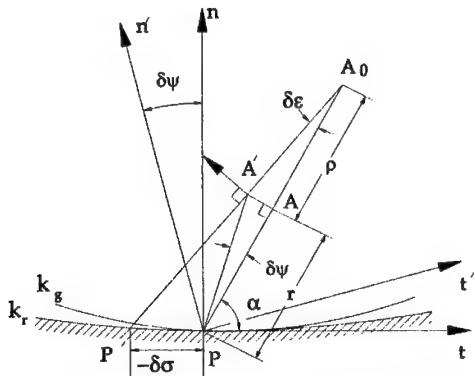


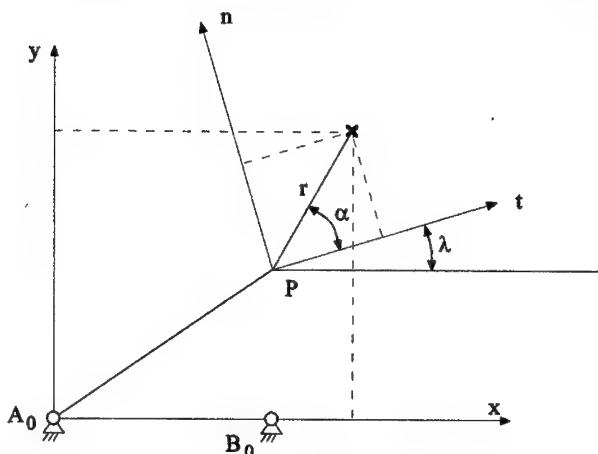
Bild 5.3: Bezeichnungen für eine kleine Verschiebung einer Ebene [Hu78]

Folgende Bezeichnungen werden verwendet:

- P      Momentanpol
- t      Tangente an  $K_r$  im Punkt P =  $P_t = P_g$
- n      Normale an  $K_r$  im Punkt P =  $P_n = P_g$
- $\lambda$     Winkel zwischen t und der x-Achse
- (x,y)    kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung in A0
- ( $P, r, \alpha$ )    Polarkoordinatensystem mit Ursprung in P
- ( $P, t, n$ )    positiv orientiertes kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung in P
- $K_r$     Rastpolbahn
- $E_r$     Rastebene
- $K_g$     Gangpolbahn
- $E_g$     Gangebene
- R      Krümmungsradius der Gangebene

- $\rho$  Krümmungsradius der Punkte von  $E_g$
- $\delta\sigma$  Verschiebung von P auf  $K_r$
- $\sigma$  Bogenlänge
- D Durchmesser des Wendekreises

Die verwendeten Koordinatensysteme sind noch einmal im folgendem Bild dargestellt:



**Bild 5.4:** Koordinatensysteme ( $x,y$ ) für das Getriebe und ( $t,n$ ) für die Polbahn

Der Krümmungsradius  $\rho$  der Bahnkurve beliebiger Punkte des Gangsystems  $E_g$  ist im Rastsystem  $E_r$  durch die Euler-Savary'sche Gleichung festgelegt und ändert sich laufend. In einem Bahnkurvenscheitel ist der Krümmungsradius stationär, d.h. es gilt die Beziehung  $\rho' = 0$ . Hier bezeichnet  $\rho'$  die Ableitung des Krümmungsradius  $\rho$  nach  $\sigma$ , der Bogenlänge von  $K_r$ . Nach der Gleichung von Euler-Savary ergibt sich für die Bewegung folgende Gleichung:

$$\rho = \frac{r^2}{D \cdot \sin \alpha - r} \quad (5.1)$$

Durch Ableitung von  $\rho$  nach  $\sigma$  ergibt sich die Gleichung der Kurve, auf der alle Punkte liegen, in denen die Bahnkurve eine stationäre Krümmung hat [TeWo62]:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{M \sin \alpha} + \frac{1}{N \cos \alpha} \quad (5.2)$$

Dabei werden die Hilfsparameter M und N wie folgt definiert:

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{D} + \frac{1}{R} \right] \quad \frac{1}{N} = -\frac{1}{3} \frac{dD}{d\sigma} \quad (5.3)$$

$R$  ist der Krümmungsradius der Gangpolbahn. Wird  $\rho'$  weiter abgeleitet, so erhält man

wegen  $\frac{d^2\rho}{d\sigma^2} = 0$  die Gleichung

$$\tan^4 \alpha + \frac{RN - NM}{RM} \tan^3 \alpha + \left( \frac{dN}{d\sigma} - 1 \right) \tan^2 \alpha + \frac{N^2 \frac{dM}{d\sigma} - 3NM}{M^2} \tan \alpha + \frac{N^2(M - 2R)}{RM^2} = 0 \quad (5.4)$$

Im Folgenden wird vorausgesetzt, daß der Wendekreis für die Koppel eines Viergelenkgetriebes vorgegeben ist. Die Winkel von PA, PB und PC werden mit  $\alpha_a$ ,  $\alpha_b$  und  $\alpha_c$  bezeichnet. Damit gilt nach dem Vieta'schen Wurzelsatz:

$$\tan \alpha_c = \frac{N^2(M - 2R)}{RM^2 \tan \alpha_a \tan \alpha_b \tan \alpha_c} \quad (5.5)$$

Wenn die Bahnkurven der Punkte A, B und C stationäre Krümmungen haben, müssen sie Gleichung (5.2) genügen:

$$\frac{1}{PA} = \frac{1}{M \sin \alpha_a} + \frac{1}{N \cos \alpha_a} \quad (5.6)$$

$$\frac{1}{PB} = \frac{1}{M \sin \alpha_b} + \frac{1}{N \cos \alpha_b} \quad (5.7)$$

$$\frac{1}{PC} = \frac{1}{M \sin \alpha_c} + \frac{1}{N \cos \alpha_c} \quad (5.8)$$

$A_0$  und  $B_0$  seien vorgegeben. Ferner sei der Mittelpunkt des vierpunktig anzunähernden Kreises durch den Punkt  $C_0 = (C_x, C_y)$  und den Winkel  $w$  gegeben.

Mit  $\alpha_{a0}$ ,  $\alpha_{b0}$  und  $\alpha_{c0}$  seien die Winkel in dem  $(x,y)$ -System (Bild 5.5), mit  $\alpha_a$ ,  $\alpha_b$  und  $\alpha_c$  die Winkel im  $(t,n)$ -System (Bild 5.6) bezeichnet. Mit diesen Bezeichnungen gilt dann:

$$\alpha_a = \alpha_{a0} - \lambda \quad \alpha_b = \alpha_{b0} - \lambda \quad \alpha_c = \alpha_{c0} - \lambda \quad (5.9)$$

$$\alpha_{a0} = \arctan \frac{P_y - A_{0y}}{P_x - A_{0x}} \quad \alpha_{b0} = \arctan \frac{P_y - B_{0y}}{P_x - B_{0x}} \quad \alpha_{c0} = \arctan \frac{C_y - P_y}{C_x - P_x} \quad (5.10)$$

wobei  $0^\circ \leq \alpha_{a0}, \alpha_{b0}, \alpha_{c0} \leq 360^\circ$ . Mit der Gleichung von Euler-Savary erhält man

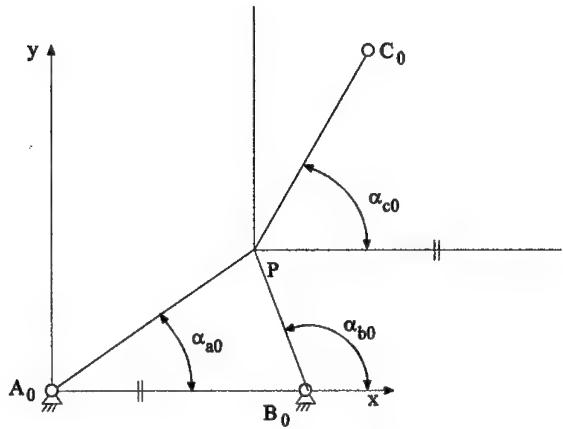


Bild 5.5: Winkeldefinitionen im  $(x,y)$ -System

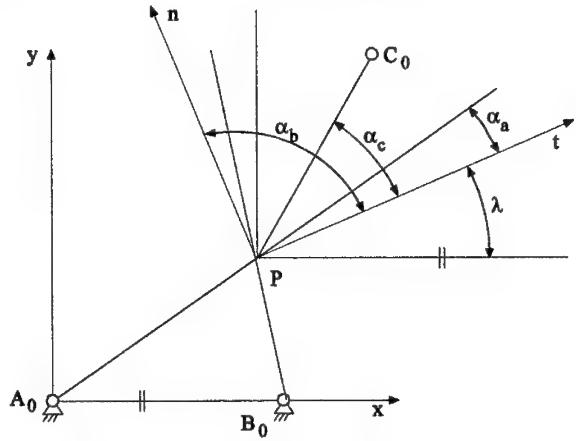


Bild 5.6: Winkeldefinitionen im  $(t,n)$ -System

$$PA_0 = -\frac{PA \sin \alpha_a}{PA - \sin \alpha_a} \quad \text{also} \quad PA = \frac{PA_0 \sin \alpha_a}{PA_0 + \sin \alpha_a} \quad (5.11)$$

$$PB_0 = -\frac{PB \sin \alpha_b}{PB - \sin \alpha_b} \quad \text{also} \quad PB = \frac{PB_0 \sin \alpha_b}{PB_0 + \sin \alpha_b} \quad (5.12)$$

$$PC_0 = -\frac{PC \sin \alpha_c}{PC - \sin \alpha_c} \quad \text{also} \quad PC = \frac{PC_0 \sin \alpha_c}{PC_0 + \sin \alpha_c} \quad (5.13)$$

Dabei wurde der Durchmesser  $D$  des Wendekreises als Bezuggröße gewählt. Deshalb müssen alle Längen durch  $D$  dividiert werden, wenn die folgenden Formeln benutzt werden.  
Werden die Beziehungen (5.11) bis (5.13) in (5.6) bis (5.8) eingesetzt, so erhält man

$$\frac{PA_0 + \sin \alpha_a}{PA_0 \sin \alpha_a} = \frac{1}{M \sin \alpha_a} + \frac{1}{N \cos \alpha_a} \quad (5.14)$$

$$\frac{PB_0 + \sin \alpha_b}{PB_0 \sin \alpha_b} = \frac{1}{M \sin \alpha_b} + \frac{1}{N \cos \alpha_b} \quad (5.15)$$

$$\frac{PC_0 + \sin \alpha_c}{PC_0 \sin \alpha_c} = \frac{1}{M \sin \alpha_c} + \frac{1}{N \cos \alpha_c} \quad (5.16)$$

Werden die Gestellpunkte  $A_0$ ,  $B_0$  und der Kreisführungsmitelpunkt  $C_0$  sowie der Polbahnpunkt vorgegeben, so gibt es in den obigen Gleichungen nur die drei Unbekannten  $M$ ,  $N$  und  $\lambda$  (man beachte hier und im folgenden, daß wegen (5.9) die Winkel  $\alpha_i$  und damit auch die nachfolgend definierten Größen  $\Delta_i$  von  $\lambda$  abhängen). Zur Vereinfachung werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\begin{aligned} \Delta_a &= \frac{PA_0 + \sin \alpha_a}{PA_0 \sin \alpha_a} & \Delta_b &= \frac{PB_0 \sin \alpha_b}{PB_0 + \sin \alpha_b} & \Delta_c &= \frac{PC_0 \sin \alpha_c}{PC_0 + \sin \alpha_c} \\ S_a &= \frac{1}{\sin \alpha_a} & S_b &= \frac{1}{\sin \alpha_b} & S_c &= \frac{1}{\sin \alpha_c} \\ C_a &= \frac{1}{\cos \alpha_a} & C_b &= \frac{1}{\cos \alpha_b} & C_c &= \frac{1}{\cos \alpha_c} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Damit ergeben sich aus (5.14), (5.15) und (5.16) drei Gleichungen mit den Unbekannten  $M$ ,  $N$  und  $\lambda$ :

$$\Delta_a = \frac{S_a}{M} + \frac{C_a}{N} \quad \Delta_b = \frac{S_b}{M} + \frac{C_b}{N} \quad \Delta_c = \frac{S_c}{M} + \frac{C_c}{N} \quad (5.18)$$

Nach Elimination von  $M$  und  $N$  erhält man folgende Gleichung zur Bestimmung von  $\lambda$ :

$$0 = (\Delta_a C_b - \Delta_b C_a) S_c + (\Delta_b S_a - \Delta_a S_b) - (S_a C_b - C_a S_b) \Delta_c \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sin \alpha_a} \left( \frac{1}{PA_0 \cos \alpha_a} - \frac{1}{PB_0 \cos \alpha_a} \right) + \frac{1}{\cos \alpha_a} \left( \frac{1}{PB_0 \sin \alpha_a} - \frac{1}{PA_0 \sin \alpha_a} \right) + \frac{1}{\sin \alpha_c} \left( \frac{1}{\cos \alpha_a \sin \alpha_b} - \frac{1}{\sin \alpha_a \cos \alpha_b} \right) \\ &= \frac{1}{PA_0} \left( \frac{1}{\sin \alpha_c \cos \alpha_b} - \frac{1}{\cos \alpha_c \sin \alpha_b} \right) + \\ &\quad \frac{1}{PB_0} \left( \frac{1}{\cos \alpha_c \sin \alpha_a} - \frac{1}{\sin \alpha_c \cos \alpha_a} \right) + \frac{1}{PC_0} \left( \frac{1}{\cos \alpha_a \sin \alpha_b} - \frac{1}{\sin \alpha_a \cos \alpha_b} \right) \\ &= \frac{\sin(\alpha_b - \alpha_c)}{PA_0 \sin \alpha_b \cos \alpha_b \sin \alpha_c \cos \alpha_c} + \frac{\sin(\alpha_c - \alpha_a)}{PB_0 \sin \alpha_a \cos \alpha_a \sin \alpha_c \cos \alpha_c} + \frac{\sin(\alpha_a - \alpha_b)}{PC_0 \sin \alpha_a \cos \alpha_b \sin \alpha_a \cos \alpha_b} \end{aligned}$$

Wegen  $\sin t \cos t = -\sin(t+90^\circ) \cos(t+90^\circ)$  erkennt man, daß mit  $\lambda$  auch  $\lambda+90^\circ$  eine Lösung dieser Gleichung ist. Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\sin(\alpha_b - \alpha_c)}{PA_0} = \frac{\sin(\alpha_{b0} - \alpha_{c0})}{PA_0} \\ c_2 &= \frac{\sin(\alpha_c - \alpha_a)}{PB_0} = \frac{\sin(\alpha_{c0} - \alpha_{a0})}{PB_0} \\ c_3 &= \frac{\sin(\alpha_a - \alpha_b)}{PC_0} = \frac{\sin(\alpha_{a0} - \alpha_{b0})}{PC_0} \end{aligned} \quad (5.20)$$

ergibt sich wegen (5.9) folgende Gleichung für  $\lambda$ :

$$0 = c_1 \sin(\alpha_{a0} - \lambda) \cos(\alpha_{a0} - \lambda) + c_2 \sin(\alpha_{b0} - \lambda) \cos(\alpha_{b0} - \lambda) + c_3 \sin(\alpha_{c0} - \lambda) \cos(\alpha_{c0} - \lambda) \quad (5.21)$$

Durch Anwendung der Additionstheoreme und Quadrieren erhält man mit

$$c = \frac{c_1 (\sin^2 \alpha_{a0} - \cos^2 \alpha_{a0}) + c_2 (\sin^2 \alpha_{b0} - \cos^2 \alpha_{b0}) + c_3 (\sin^2 \alpha_{c0} - \cos^2 \alpha_{c0})}{c_1 \sin \alpha_{a0} \cos \alpha_{a0} + c_2 \sin \alpha_{b0} \cos \alpha_{b0} + c_3 \sin \alpha_{c0} \cos \alpha_{c0}} \quad (5.22)$$

eine elementar lösbar quadratische Gleichung für  $x = \cos^2 \lambda$ :

$$x^2 - x + \frac{1}{4+c^2} = 0 \quad (5.23)$$

Aus den beiden Lösungen dieser Gleichung ergeben sich zunächst 4 Lösungen für  $\lambda$ , durch Rückwärtseinsetzen fallen jedoch zwei wieder fort. Wenn die Krümmung in einem der Punkte A, B oder C verschwindet, so verschwindet auch der entsprechende Koeffizient  $c_i$  in Gleichung 5.22. Daher ergibt sich folgende Tabelle, wobei nun stets C der Koppelpunkt sei.

$c_1$	$c_2$	$c_3$	Koppelkurve	Getriebe
>0	>0	>0	Kreisführung	Viergelenk
0	>0	>0	Kreisführung	Schubkurbel
>0	0	>0		
>0	>0	0	Geradführung	Viergelenk
0	0	>0	Kreisführung	Doppelschieber
0	>0	0	Geradführung	Schubkurbel
>0	0	0		

Tabelle 5.1: Synthesemöglichkeiten für Koppelkurven mit lokal konstanter Krümmung durch verschiedene Getriebetypen

Nun sei wieder der Fall einer Viergelenkeradführung betrachtet, also  $c_3=0$ . Dann erhält man gerade das Formelsystem aus [FHG94]. Statt des Krümmungsradius wird nun der

vorzeichenbehaftete Abstand vom Geradführungspunkt zum Pol vorgegeben.

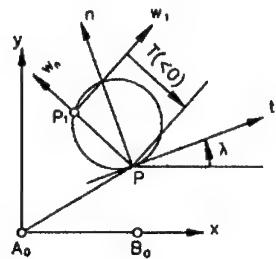


Bild 5.7: Bezeichnung der Winkel  $w_1$ ,  $w_n$  und der Verschiebung  $T$

Der Winkel der gegebenen Geraden gegenüber der x Achse betrage  $w_1$ ; seine Normale habe den Winkel von  $w_n$ . Dann gelten folgende Beziehungen (Bild 5.7):

$$w_n = w_1 + 90^\circ \quad P_x = P_{x1} + T \cos w_n \quad P_y = P_{y1} + T \sin w_n \quad (5.24)$$

Dabei ist  $T$  die Verschiebung des Pols  $P$  auf der Normalen gegenüber  $P_1$ . Wenn  $P$  an der positiven Seite der Normalen  $w_n$  liegt, ist  $T > 0$ , sonst ist  $T < 0$ , aber in jedem Fall gilt  $T \neq 0$ . Gleichung (5.23) liefert entweder vier (Bild 5.8) oder zwei (Bild 5.9) Lösungen für  $\lambda$ , deren Koppelkurven jedoch für  $\lambda = \lambda + 180^\circ$  paarweise übereinstimmen.

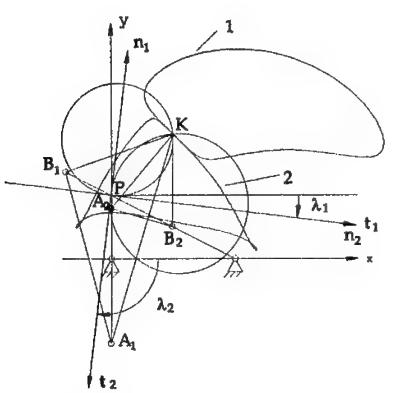


Bild 5.8: Zwei Lösungen für  $\lambda$  (nach [Han93])

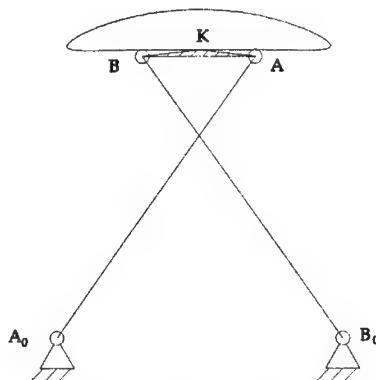


Bild 5.9: Eine Lösung für  $\lambda$  (nach [Han93])

Die Koordinaten der Gelenke A und B ergeben sich nach Bestimmung von  $\lambda$  folgendermaßen:

$$\begin{aligned} A_x &= P_x + PA \cos(\alpha_a + \lambda) & A_y &= P_y + PA \sin(\alpha_a + \lambda) \\ B_x &= P_x + PB \cos(\alpha_b + \lambda) & B_y &= P_y + PB \sin(\alpha_b + \lambda) \end{aligned} \quad (5.25)$$

### Normalfall:

In der Regel existieren für  $\lambda$  zwei Lösungen und zwar  $\lambda_1$  im Intervall  $\alpha_i - 90^\circ < \lambda_1 < \alpha_{i0}$  und  $\lambda_2 = \lambda_1 - 90^\circ$ .

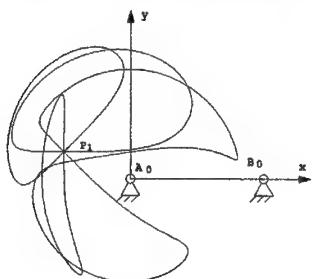
### Sonderfall:

Wenn  $\alpha_i = 90^\circ$  ist, zerfällt die zirkulare kubische Kurve von Gleichung (5.14) in eine Gerade und einen Kreis, und nach (5.20) gilt folgende Beziehung:

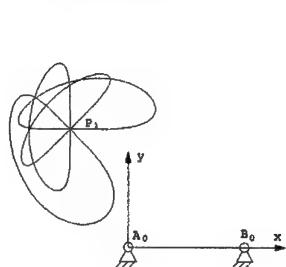
$$\lambda = \alpha_{i0} - 90^\circ \quad (5.26)$$

In diesem Fall können PA und PB direkt mit (5.23) berechnet werden.

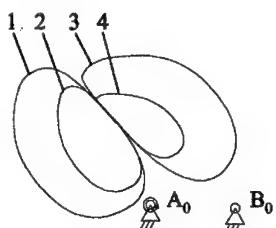
Der Vollständigkeit halber werden noch drei von [Han93] angegebene Beispiele dargestellt. Dabei ist jeweils  $A_0 = (0,0)$  und  $B_0 = (10,0)$ . Die Bilder 5.10 und 5.11 zeigen die Variation des Geradführungswinkels für zwei unterschiedliche Punkte  $P_1$ . In Bild 5.12 wurde T variiert. Berechnungen zeigten, daß bei gegebener Geradführungslänge die maximale Abweichung der Koppelkurve von der Geraden fast linear von T abhängig ist.



**Bild 5.10:**  $P_1 = (-5, 2)$



**Bild 5.11:**  $P_1 = (-5, 10)$

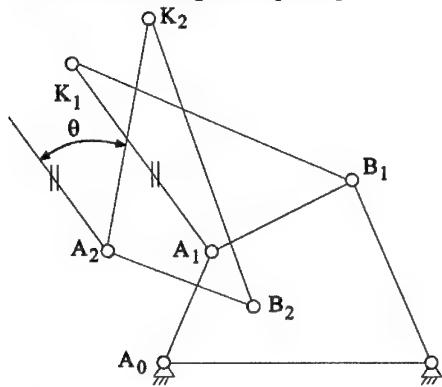


**Bild 5.12:** Variation von T

## 5.2 Zusätzliche Vorgaben

Wegen der Einfachheit der Synthesegleichung können durch Variation von T entweder interaktiv oder numerisch zusätzliche Bedingungen erfüllt werden. Hier werden folgende Fälle untersucht:

- Im Geradführungspunkt liegt ein Doppelpunkt.
- Ein weiterer Genaupunkt wird vorgegeben.
- Die Koppelkurve hat eine Spitze (aber nicht im Geradführungspunkt).
- Die Geradführung ist fünfpunklig.



**Bild 5.13:** Wahl eines zusätzlichen Genaupunkts  $K_2$ . Die durch den Winkel  $\theta$  gegebene Lage ist unbekannt.

Für die ersten beiden Fälle sei  $\theta$  der Drehwinkel der Koppel von der Geradführungsstellung  $A_1, B_1, K_1$  zur weiteren Stellung  $A_2, B_2, K_2$ . Ferner werden komplexe Koordinaten verwendet:

$$A_0 = A_{0x} + iA_{0y} \quad B_0 = B_{0x} + iB_{0y}$$

$$A_1 = A_{1x} + iA_{1y} \quad B_1 = B_{1x} + iB_{1y} \quad K_1 = K_{1x} + iK_{1y}$$

$$A_2 = A_{2x} + iA_{2y} \quad B_2 = B_{2x} + iB_{2y} \quad K_2 = K_{2x} + iK_{2y}$$

### Doppelpunkt im Geradführungspunkt

Im diesem Fall gilt offenbar  $K_1 = K_2$ . Ferner muß  $\overline{A_0 A_1} = \overline{A_0 A_2}$  und  $\overline{B_0 B_1} = \overline{B_0 B_2}$  gelten. Nach Einsetzen der komplexen Koordinaten, Quadrieren zum Berechnen der Beträge und Anwendung trigonometrischer Identitäten ergeben sich zwei lineare Gleichungen für  $\sin(\theta)$

und  $\cos(\theta)$ :

$$a_1 \sin(\theta) + b_1 \cos(\theta) + c_1 = 0 \quad \text{und} \quad a_2 \sin(\theta) + b_2 \cos(\theta) + c_2 = 0 \quad (5.27)$$

Für die Koeffizienten gilt:

$$a_1 = -A_{1y}A_{0x} - A_{1y}K_{1x} + A_{1x}A_{0y} - A_{1y}K_{1y} - K_{1x}A_{0y} - A_{0x}K_{1y}$$

$$b_1 = A_{0x}A_{1x} - A_{1x}K_{1x} - A_{0x}K_{1x} + A_{0y}A_{1y} - A_{0y}K_{1y} - A_{1y}K_{1y} + K_{1y}^2 + K_{1x}^2$$

$$c_1 = -b_1$$

$$a_2 = -B_{1y}B_{0x} - B_{1y}K_{1x} + B_{1x}B_{0y} - B_{1y}K_{1y} - K_{1x}B_{0y} - B_{0x}K_{1y}$$

$$b_2 = B_{0x}B_{1x} - B_{1x}K_{1x} - B_{0x}K_{1x} + B_{0y}B_{1y} - B_{0y}K_{1y} - B_{1y}K_{1y} + K_{1y}^2 + K_{1x}^2$$

$$c_2 = -b_2$$

Trivialerweise ist  $\theta=0$  eine Lösung dieser Gleichungen. Eine weitere Lösung, also ein Schnittpunkt der beiden durch 5.27 gegebenen Geraden mit dem durch  $\sin(\theta)$  und  $\cos(\theta)$  parametrisierten Einheitskreis, kann nur existieren, wenn die beiden Geraden zusammenfallen. Die Synthesegleichung für einen Doppelpunkt im Geradführungspunkt lautet also:

$$a_1 b_2 = a_2 b_1 \quad (5.28)$$

### Zusätzlicher Genaupunkt

Im diesem Fall gilt  $K_1 \neq K_2$ . Wie oben muß offenbar  $\overline{A_0 A_1} = \overline{A_0 A_2}$  und  $\overline{B_0 B_1} = \overline{B_0 B_2}$  gelten. Wiederum erhält man nach einfacher Umformung eine Gleichung vom Typ 5.27, diesmal jedoch mit anderen Koeffizienten:

$$a_1 = -K_{1y}K_{2x} - A_{1x}K_{2y} - K_{1x}A_{0y} + K_{1x}K_{2y} + A_{1x}A_{0y} - A_{1y}A_{0x} + A_{1y}K_{2x} + K_{1y}A_{0x}$$

$$b_1 = -A_{1y}K_{2y} - K_{1y}A_{0y} + K_{1y}K_{2y} + K_{1x}K_{2x} - A_{1x}K_{2x} + A_{0x}A_{1x} - K_{1x}A_{0x} + A_{0y}A_{1y}$$

$$c_1 = A_{1x}K_{1x} - A_{1x}A_{0x} - A_{0y}A_{1y} + A_{0x}K_{2x} + A_{0y}K_{2y} + A_{1y}K_{1y} - \frac{1}{2}(K_{2x}^2 + K_{2y}^2 + K_{1x}^2 + K_{1y}^2)$$

$$a_2 = -K_{1y}K_{2x} - B_{1x}K_{2y} - K_{1x}B_{0y} + K_{1x}K_{2y} + B_{1x}B_{0y} - B_{1y}B_{0x} + B_{1y}K_{2x} + K_{1y}B_{0x}$$

$$b_2 = -B_{1y}K_{2y} - K_{1y}B_{0y} + K_{1y}K_{2y} + K_{1x}K_{2x} - B_{1x}K_{2x} + B_{0x}B_{1x} - K_{1x}B_{0x} + B_{0y}B_{1y}$$

$$c_2 = B_{1x}K_{1x} - B_{1x}B_{0x} - B_{0y}B_{1y} + B_{0x}K_{2x} + B_{0y}K_{2y} + B_{1y}K_{1y} - \frac{1}{2}(K_{2x}^2 + K_{2y}^2 + K_{1x}^2 + K_{1y}^2)$$

Eliminiert man nun  $\sin(\theta)$  und  $\cos(\theta)$  aus Gleichung 5.27 und setzt diese Ausdrücke in die Kreisgleichung ein, so erhält man folgende Synthesegleichung:

$$b_1^2 c_2^2 + c_1^2 b_2^2 + c_1^2 a_2^2 + a_1^2 c_2^2 - b_1^2 a_2^2 - a_1^2 b_2^2 = 2(b_1 c_1 b_2 c_2 + a_1 c_1 a_2 c_2 - a_1 b_1 a_2 b_2) \quad (5.29)$$

### Koppelkurve mit Spitze

Eine Koppelkurve hat bekanntlich in einem Punkt genau dann eine Spurze, wenn der Koppelknoten mit dem Pol übereinstimmt. Der Koppelknoten, in dem dies geschehen soll, sei aber nicht etwa der Geradführungspunkt, sondern ein beliebiger Punkt der Koppelkurve.

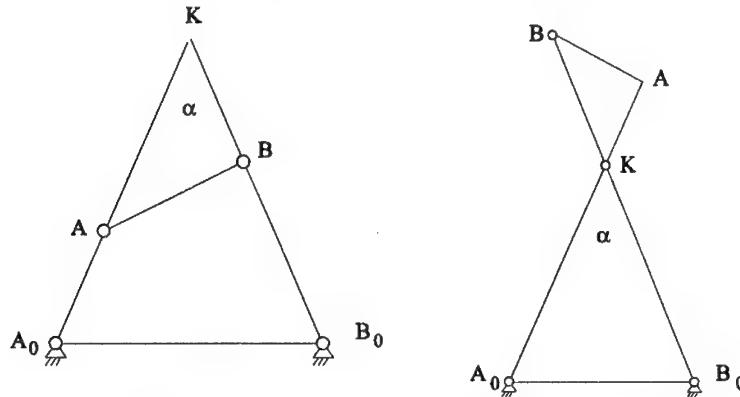


Bild 5.14: Koppelknoten im Pol (rechts Überkreuzlage der Schwingen)

Bekanntlich ist der Momentanpol beim Viergelenk durch den Schnittpunkt der Geraden  $A_0A$  und  $B_0B$  gegeben. Damit der Koppelknoten mit diesem übereinstimmt, muß einer der beiden in Bild 5.14 dargestellten Fälle eintreten. Aus beiden Prinzipskizzen läßt sich eine Gleichung herleiten, die die Gliedlängen erfüllen müssen, damit die Koppelkurve eine Spurze hat. Diese ergibt sich jeweils dadurch, daß der Cosinussatz auf die beiden Dreiecke  $A_0KB_0$  und  $AKB$  angewandt wird, die beide den gleichen Winkel  $\alpha$  einschließen:

$$\frac{(A_0A \pm AK)^2 + (B_0B \pm BK)^2 - (A_0B_0)^2}{2(A_0A \pm AK)(B_0B \pm BK)} = \frac{AK^2 + BK^2 - AB^2}{2AKBK} \quad (5.30)$$

Das Minuszeichen gilt dabei für das rechte Bild.

## Fünfpunktige Geradführung

Wenn  $P_1$  ein Burmesterscher Punkt ist, gilt zusätzlich folgende Gleichung [Wo60], [TeWo62]:

$$\tan^2 \alpha_1 + \left( \tan \alpha_a + \tan \alpha_b + \frac{N(R - M)}{RM} \right) \tan \alpha_1 + \frac{N^2(M - 2R)/(RM^2)}{\tan \alpha_a \tan \alpha_b} = 0 \quad (5.31)$$

Diese Formel kann weiter vereinfacht werden, um nach Vorgabe von  $A_0$   $P_1$  und der Geradführungsrichtung die anderen Burmesterschen Punkte für den zweiten Gestellpunkt zu berechnen, wie auch bei [Han93] ausgeführt wurde. Hier jedoch wird für alle aufgeführten Zusatzbedingungen folgendes Verfahren gewählt:

- Aus numerischen Gründen wird die Gestellänge auf 1 normiert und dementsprechend  $P_1$  angepaßt. Sonst werden die Potenzen der Gliedlängen zu groß.
- Zu jedem  $T$  wird wie in 5.1 beschrieben  $\lambda$  berechnet.
- Nach den Formeln 5.24 und 5.25 werden die Gelenkpunkte in der Geradführungsstellung berechnet und daraus die Gliedlängen.
- Aus der jeweiligen Synthesegleichung (5.28, 5.29, 5.30 oder 5.31) wird die Zielfunktion gebildet.
- Durch Variation von  $T$  wird die Zielfunktion berechnet.

Auf diese Weise erhält man einen sehr einfachen Formelsatz, mit dem zahlreiche Geradführungsprobleme gelöst werden können. In vielen Fällen kann zunächst eine Koppelkurve gefunden werden, die von ihrer Gestalt, dem Platzbedarf und der Lage der Gestellpunkte den Anforderungen bereits näherungsweise entspricht. Danach können Optimierungsverfahren zur Verbesserung einzelner Kennwerte, insbesondere der Geradführungsgüte, eingesetzt werden. Alternativ zur programmgesteuerten Variation von  $T$  können die Vorgaben auch interaktiv verändert werden, bis eine gute Ausgangslösung gefunden wurde. Dies ist nicht zuletzt deshalb möglich, weil die Synthesegleichung für  $\lambda$  analytisch gelöst werden konnte.

## 6 Klassische Syntheseverfahren

Die meisten bekannten Syntheseverfahren für Viergelenkgetriebe können auf Geradführungsprobleme angewandt werden. Bei exakten Verfahren werden endlich oder unendlich benachbarte Genaupunkte bzw. Genaulagen auf der anzunähernden Geraden gewählt. Tabelle 6.1 ermöglicht die Auswahl eines Verfahrens je nach Art der Vorgaben.

Charakteristik	$A_0$	$B_0$	$A_1$	$B_1$	$A_0$ A	AB	AK	$\phi_g$	E O	Quelle	Zusatzannahmen Verfahren, Bemerkungen
P <sub>1</sub> -P <sub>2</sub> -P <sub>3</sub>	■ ■				✓ ✓ ✓				■	[Li63, S. 119]	$P_2 = (P_1 + P_3)/2$ , K auf AB
P <sub>1</sub> -P <sub>2</sub> -P <sub>3</sub>	■ ■	■ ■	■ ■						■	[Vo89, Bild 4.48]	
PP-P	■ ■	■ ■	■ ■						■	[Vo89, Bild 4.49]	
PPP	■ ■	■ ■	■ ■						■	[Lo86, S. 108]	
PPPP	■ ■	□ □	■ ■	□					□	[Lo86, S. 109]	Gerade für $B_0B_1$ durch den Pol wählbar
P <sub>1</sub> -P-P-P	■			□						[LuMo95, S. 208]	$B_1$ auf einer Hilfsgeraden wählbar, paarweise parallele Lagen von AB und $A_0 B_0$
P-P-P-P	□ ■									[Kr55, S. 113]	Symmetrie der Genaupunkte und der KK, $A_0$ auf Symmetrieachse
P <sub>1</sub> -P <sub>2</sub> -P <sub>3</sub> -P <sub>4</sub>	■ ■									[GGS93, S. 62]	$P_1 + P_4 = P_2 + P_3$ Mittelpunktkurve zerfällt in Kreis und Gerade
P-P-P-P	■ ■									[Kr55, S. 109]	iteratives Verfahren, zusätzliche Wahl eines Pols
P-P-P-P	■ ■	■								[Lo86, S. 130]	$B_0$ auf Mittelpunktkurve
P-P-P-P	■ ■	□				✓	✓			[Kr55, S. 132]	$P_1 + P_4 = P_2 + P_3$ , $B_0$ auf $g^\perp$
PPPPP					✓					[Lo86, S. 111]	K auf AB
PPPP	■ ■									[GGS93, S. 66]	Mittelpunktkurve zerfällt in Kreis und Gerade
P( $\phi_1$ )-P( $\phi_2$ )-P( $\phi_3$ )			■							[Vo79, S. 98]	
PPPP	■ ■									[Vo79, Bild 5.26a]	
PP-PP	■									[Kr55, S. 189]	
PP-PP										[Kr55, S. 188]	
P <sub>1</sub> -P-P-P-P-P	□ □									[Kr55, S. 128]	Genaupunkte symmetrisch, $B_0$ auf m, Vorgabe einer Geraden für $A_1$
P-P-P <sub>1</sub> -P-P	□ ■									[Kr55, S. 120]	$B_0$ auf $g^\perp$
P-P-P <sub>1</sub> -P-P	□	■								[Kr55, S. 121]	Genaupunkte symmetrisch
P-P-P-P-P	□									[Kr55, S. 160]	Äquidistante Genaupunkte und Antriebswinkel, $A_0$ auf $g^\perp$

Charakteristik	A <sub>0</sub>	B <sub>0</sub>	A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	A <sub>0</sub> A	AB	AK	ϕ <sub>g</sub>	O <sub>g</sub>	Quelle	Zusatzannahmen Verfahren, Bemerkungen
	■	■	■	■	■	■	■	■	■		
P <sub>1</sub> P <sub>1</sub> -P <sub>2</sub> P <sub>2</sub>	■	■						■	[Kr55, S. 170]		ein Pol wählbar
P <sub>1</sub> P <sub>1</sub> -P <sub>2</sub> P <sub>2</sub>	□	□		■				□	[Kr55, S. 171]		
P <sub>1</sub> P <sub>1</sub> -P <sub>2</sub> P <sub>2</sub>	□	□		□				✓	□ [Kr55, S. 171]		A <sub>0</sub> auf g <sup>⊥</sup> symmetrisches Getriebe
P <sub>2</sub> -P <sub>1</sub> P <sub>1</sub> -P <sub>3</sub>	■	■						■	[Kr55, S. 177]		
P <sub>2</sub> -P <sub>1</sub> P <sub>1</sub> -P <sub>3</sub>	■	■		■				■	[Kr55, S. 177]		
P-P-P-P-P	■	■						✓	[Kr55, S. 136]		A <sub>1</sub> auf Hilfsgeraden
P(ϕ <sub>1</sub> )-P(ϕ <sub>2</sub> ) P(ϕ <sub>1</sub> )-P(ϕ <sub>2</sub> )	□							✓	[Kr55, S. 144]		A <sub>0</sub> auf Mittelsenkrechter zu P(ϕ <sub>1</sub> ) und P(ϕ <sub>2</sub> )
PPPP	□	□						□	[Kr55], [Lo86]		
PPPPP	□	□						■	[Lo86] [Br80]		
P-PPP-P	□	□						■	[Br80]		
PP-P-PP	□	□						■	[Br80]		
P-P-P-P-P	□	□						✓	■ [Br80]		
P-P-P-P	□	□						✓	■ [Br80]		

Tabelle 6.1: Syntheseverfahren mit möglichen Vorgaben und Zusatzannahmen, die die Lösungsvielfalt einschränken

Dabei sind nicht alle aufgrund einer ausgeglichenen Wertigkeitsbilanz denkbaren Kombinationen möglich. Ferner konnten nicht alle in der Literatur beschriebenen Verfahren berücksichtigt werden. Beispielsweise wurden Verfahren nicht aufgeführt, bei denen zunächst eine Schubkurbel mit vorgegebenen Lagen oder Antriebswinkelzuordnungen konstruiert und dann die Lagentheorie angewandt wird. Sie ermöglichen keine grundsätzlich neuen Vorgaben gegenüber direkten Verfahren. In einem Synthesemodul für beliebige viergliedrige Getriebe kann die Verwendung solcher Verfahren jedoch den modularen Aufbau der Syntheseprogramme erleichtern.

Die Charakteristik gibt an, wieviele endlich bzw. unendlich benachbarte Punkte vorgegeben werden. Mögliche Antriebswinkelzuordnungen werden durch die zugehörigen Winkel ϕ<sub>i</sub> symbolisiert. Die Mittelsenkrechte auf die Geradführungsstrecke, deren Länge durch den ersten und den letzten Genaupunkt gegeben ist, wird mit m bezeichnet. Eventuelle Restriktionen für die Punkte sind die Symmetrie bezüglich m oder ein äquidistanter Abstand aufeinanderfolgender Genaupunkte. Solche Anforderungen sind in der rechten Spalte aufgeführt. Vorgegeben werden können die Gestellpunkte A<sub>0</sub> und B<sub>0</sub>, die Gelenkpunkte A und B, die Längen AK und BK des Koppeldreiecks oder der Geradführungswinkel ϕ<sub>g</sub>. Da A und B jeweils nur in einer Lage vorgegeben werden, wurden die Genaupunkte so numeriert, daß dies stets die erste Lage ist. Daher kann P<sub>1</sub> beispielsweise auch der mittlere von 5 Punkten sein. Kann ein Punkt beliebig vorgegeben werden, so wird dies durch das Symbol ■ gekennzeichnet. Schränkt dagegen ein geometrischer Ort die Wahl des Punktes ein, so wird

---

das Symbol  $\square$  verwendet. Typische geometrische Örter bei den aufgeführten Verfahren sind Geraden (insbesondere Mittelsenkrechten), Kreise oder auch eine Mittelpunktkurve. Die Art der Kurve wird rechts kurz beschrieben. Ein leerer Platz bedeutet, daß die entsprechende Größe nicht vorgegeben werden kann. Eine mögliche Vorgabe von Längen oder von  $\phi_g$  wird durch den Haken  $\checkmark$  markiert. Da maximal 9 Vorgaben möglich sind, die beliebige Vorgabe eines Genaupunktes 1-wertig ist und die Vorgabe eines Gelenkpunktes zweiwertig ist, werden in den Zeilen 2-4 alle Freiheiten ausgeschöpft. Wenn dies nicht der Fall ist, werden nur spezielle Lösungen ermittelt (vgl. unten).

Ferner sind Quellen für Berechnungs- bzw. Konstruktionsverfahren angegeben. Bei einigen Verfahren müssen während der Konstruktion weitere Hilfsparameter festgelegt werden. Besonders sinnvoll ist die Vorgabe von Gestellpunkten. Die Vorgabe von A oder B ist in der Regel nur in Verbindung mit Antriebswinkelzuordnungen vorteilhaft. Dadurch können Kraftangriffswinkel positiv beeinflußt werden, vorgegebene Übertragungsaufgaben näherungsweise erfüllt oder der Geradführungswinkel  $\phi_g$  vorgegeben werden. Besonders problematisch ist die Vorgabe konstruktiv wichtiger Punkte auf geometrischen Örtern, die erst in der Mitte einer geometrischen Konstruktion bestimmt werden können. Erweist sich die Lage eines solchen Punktes als ungünstig, so muß das Verfahren wiederholt werden. Nur mit großer Erfahrung können die Vorgaben ohne langes Suchen so geändert werden, daß die Lage verbessert wird. Aber auch wenn umgekehrt auf einer Kurve mehrere zunächst geeignete erscheinende Punkte gewählt werden können, muß die Konstruktion u.U. mehrfach zu Ende geführt werden, bevor ein akzeptables Getriebe ermittelt werden kann.

Vorteilhaft sind daher Verfahren, bei denen die Wahl von Punkten auf Kurven entweder anfangs erfolgt, oder am Schluß, wenn die Eignung des Getriebes aus der Lage dieses Punktes besser zu beurteilen ist. Beispielsweise ist bei Verwendung der Lagensynthese innerhalb eines Optimierungsverfahrens die Variation von 5 Lagen (Bestimmung der Burmester-Punkte) der Variation von 4 Lagen und Auswahl der Gestellpunkte auf der Mittelpunktkurve vorzuziehen.

Sollen Geradführungen mit hohen Ansprüchen oder vorgegebenen Kennwerten ermittelt werden, so ist stets ein iteratives Vorgehen im Zusammenspiel mit den Programmen zur Ermittlung der Kennwerte erforderlich. Besonders vorteilhaft ist hier die Verwendung allgemeiner Optimierungsverfahren, bei denen die vorzugebenden Größen in einem zu variierenden Vektor zusammengefaßt werden. Bei vielen geometrisch orientierten Verfahren ist hierzu jedoch zusätzlicher Programmieraufwand erforderlich. Die Auswahl von Punkten auf Kurven kann nämlich nicht mehr interaktiv erfolgen, sondern muß automatisch durchgeführt werden. Dazu sind einfache Parametrisierungen dieser Kurven erforderlich.

---

Bedenkt man, daß beispielsweise die Mittelpunktkurve m zerfallen kann, so werden die damit verbundenen numerischen (schlechte Konvergenz) und programmtechnischen Probleme deutlich. Da die bekannten Vorteile von in ein CAD-System integrierten geometrischen Syntheseverfahren - beispielsweise die Visualisierung sämtlicher Konstruktionsschritte - innerhalb einer solchen Optimierung ohnehin nicht genutzt werden können, empfehlen wir die Verwendung algebraischer Verfahren. Diese sind auch allgemeingültiger (denn nicht jede Formel kann geometrisch interpretiert werden), schneller und numerisch stabiler. In jedem Fall sollten aber die Entwicklung der Zielfunktion und die grafische Darstellung der Koppelkurve (in vorgegebenen Zeitintervallen) zur Information des Konstrukteurs in Verbindung mit einem möglichen Eingriff in den Programmablauf erfolgen.

Wesentlich für die erfolgreiche Anwendbarkeit eines Verfahrens auf unterschiedliche Probleme ist die Allgemeingültigkeit der Vorgaben und der Lösung. In den folgenden Fällen ist diese nicht gegeben:

- Die Punkte werden nicht beliebig auf der Geraden vorgegeben, sondern symmetrisch,
- es werden nur Koppelkurven spezieller Form betrachtet, beispielsweise
  - symmetrische Koppelkurven
  - Koppelkurven mit Ballschem Punkt
- nur Sonderlagen des Getriebes werden berücksichtigt,
- der Koppelpunkt liegt auf der Koppelgeraden AB,
- bei der Punktlagenreduktion fallen Pole mit Gelenkpunkten zusammen,
- der Zerfall der Mittelpunktkurve wird erzwungen.

Besonders bei Verwendung der Punktlagenreduktion nach Hain [Ha61] ist das Lösungsgetriebe nur eine spezielle Lösung der Syntheseaufgabe. Beispielsweise wird bei Vorgabe von 4 Genaupunkten  $P_1, \dots, P_4$  der Gestellpunkt  $A_0$  im Schnittpunkt der Mittelsenkrechten durch  $P_1$  und  $P_4$  bzw.  $P_2$  und  $P_3$  gewählt. Dabei zeigt die Wertigkeitsbilanz, daß bei Vorgabe von 4 Genaupunkten prinzipiell noch 5 Freiheiten bestehen, also beide Gestellpunkte frei vorgegeben werden können. Zwar können durch Vertauschen der Indizes zwei weitere Möglichkeiten für  $A_0$  ermittelt werden, die kontinuierliche Vielfalt der möglichen Lösungen wird jedoch nicht erfaßt. Sind nicht einzelne Genaupunkte, sondern eine anzunähernde Kurve vorgegeben, so kann auch  $A_0$  vorgegeben werden. Dann können jeweils zwei Genaupunkte durch Schnitt der zu durchlaufenden Kurve mit einem Kreis durch  $A_0$  festgelegt werden. Ist die Kurve eine Gerade, so liegen die so ermittelten Genaupunkte aber stets symmetrisch zum Lot von  $A_0$  auf die Gerade. Also tritt der erste der in der obigen Liste aufgeführten Fälle ein.

---

Da Verfahren, welche diese Spezialfälle voraussetzen, entweder wesentlich einfacher durchzuführen sind als allgemeingültige Verfahren oder die Vorgabe von mehr als 5 Punkten bzw. Lagen ermöglichen, werden sie sehr häufig verwendet, insbesondere dann, wenn keine Rechnerunterstützung genutzt wird. Für viele Aufgabenstellungen ist dies auch sinnvoll. Beispielsweise ist bei vielen passiven Geradführungen, wie etwa der Lagerung einer Achse oder der Führung einer Kreissäge, die Aufgabenstellung symmetrisch, weil keine Richtung auf der Geraden ausgezeichnet ist. Daher ist in der Regel die optimale Lösung ebenfalls symmetrisch. Zur Ermittlung einer solchen Lösung sind bei Vorgabe von Kennwerten die Verfahren aus Kapitel 4 am geeignetsten. Ist die Vorgabe von Gelenkpunkten oder Geschwindigkeiten gewünscht, so kann ein geeignetes Verfahren aus der Tabelle gewählt werden. Aus allgemeingültigen Verfahren können bei symmetrischer Wahl der freien Parameter weitere Konstruktionsverfahren für symmetrische Getriebe ermittelt werden.

Der Hauptnachteil nicht allgemeingültiger Verfahren zeigt sich bei der Kombination dieser Syntheseverfahren mit Parameteroptimierungsverfahren. Auch bei Variation der Vorgaben werden prinzipiell nicht alle Lösungsmöglichkeiten erfaßt. Daher wurde in Tabelle 6.1 eine Spalte „Opt.“ eingetragen, in welcher markiert wird, ob das Verfahren sich zur Verwendung innerhalb von Optimierungsverfahren gut (■) bedingt (□) oder nicht (-) eignet. Sofern sichergestellt ist, daß wenigstens alle guten Geradführungen näherungsweise berücksichtigt werden, wie beispielsweise für Geradführungen mit Ballschem Punkt bei der Variation der Gestellpunkte und des Parameters  $T$  in Kapitel 5, ist dieser Nachteil nicht schwerwiegend. Umgekehrt ist nämlich die Verkleinerung des Suchraums numerisch vorteilhaft. Die anderen der 6 oben aufgeführten Spezialfälle haben aber keinen inhaltlichen Zusammenhang zu Geradführungen. Beispielsweise sind Viergelenke, bei denen der Koppelpunkt auf der Koppelgeraden AB liegt, keineswegs immer gute Geradführungen.

Auch eine beliebige Wahl der Genaupunkte auf der Geraden bedeutet bereits eine Einschränkung der Vielfalt möglicher Getriebe. Durch Auswahl eines Syntheseverfahrens wird in diesem Fall nämlich die Anzahl der Schnittpunkte der Koppelpunkte mit der Geraden festgelegt. So sind mit den in der Tabelle aufgeführten Verfahren keine 6-punktigen Geradführungen zu ermitteln, auch wenn 9 Parameter, also die maximal mögliche Anzahl, variiert werden. Solche Koppelkurven berühren die Gerade nämlich nur in einem Punkt. Deshalb empfiehlt der Autor die folgende Vorgehensweise:

- Die Burmestersche Theorie für 5 endlich benachbarte Lagen wird verwendet.

- Die (prinziell mögliche ) Erstellung von Programmen für die Kombinationen aus endlich- und unendlich benachbarten Lagen (z.B. PP-P-PP) wird durch Betrachtung dicht benachbarter Lagen ersetzt.
- Die Genaupunkte werden nicht nur auf der Geraden, sondern alternativ senkrecht dazu innerhalb eines je nach gewünschter Genauigkeit vorzugebenden Toleranzbandes variiert. Lotpunkte dieser maximal 5 zu variierenden Punkte liegen im Anfangs- und Endpunkt der Geradführung und äquidistant dazwischen.
- Wenn außerhalb des Geradführungsbereichs Genaupunkte- oder Lagen vorgegeben werden sollen, so werden nur 4 Punkte auf der Geraden variiert. Die Variation von weniger als 4 Punkten auf der Geraden führt zu längeren Laufzeiten, wenn die Geradführungsgüte sehr hoch sein soll.
- Wenn die Drehung der Koppel für die Geradführungsaufgabe wichtig ist (z.B. Führung einer Kreissäge), so erhält man Intervalle für die den Genaupunkten zugeordneten Drehwinkel. Die Burmestersche Theorie liefert dann die möglichen Gestellpunkte.
- Bei der Startlösung wählt der Benutzer interaktiv ein Getriebe aus, wenn mehr als ein Getriebe existiert.
- Während der Optimierung wird in einem solchen Fall diejenige Lösung gewählt, die näher an der zuletzt bewerteten Lösung liegt. Manchmal ist es sinnvoll, von jeder der Startlösungen eine getrennte Optimierung zunächst mit geringerer Anzahl der Schritte zu starten. Dieses Verfahren konvergierte in der Regel schneller, als das folgende Verfahren:
- Berechnung und Bewertung sämtlicher Getriebe, die die momentan vorgegebenen Genaulagen erfüllen und Auswahl der besten dieser Lösungen.
- Ist der Gestellpunkt  $A_0$  fest oder in einem relativ kleinen Gebiet gegeben, so werden  $A_0$  und  $A_1$  variiert. Dadurch kann beispielsweise auch ein umlaufender Antrieb sichergestellt werden. Aus der ersten Lage und den weiteren Genaupunkten ergeben sich dann die übrigen Lagen.
- Bei Vorgabe von Antriebswinkelzuordnungen können Syntheseverfahren für Schubkurben genutzt werden, um  $A_0$  und  $A_1$  zu bestimmen. Der Schubweg entspricht dabei der Geradführungsstrecke. Ebenso kann die Anfangs- bzw. Endgeschwindigkeit des Koppelpunktes vorgegeben werden.

Eine ausführliche und wesentlich allgemeinere Darstellung dieser „Variation der Genaupunkte“ findet sich in [Lü91,92]. Dort werden auch weitere Vorteile beschrieben.

Allerdings konnten die im folgenden Kapitel vorgestellten unsymmetrischen Geradführungen mit vollständig ausgeglichener Fehlercharakteristik nicht durch dieses Verfahren ermittelt werden. Auch wenn die Startlösung dicht an einem solchen Getriebe gewählt wurde, war die Konvergenz schlecht. Die Ursache für dieses Problem liegt möglicherweise darin, daß nur 5 Lagen variiert werden können, aber der maximale Abstand einer Koppelkurve mit vollständig ausgeglichener Fehlercharakteristik von der zu approximierenden Geraden in 7 Punkten

---

angenommen wird. Aus der numerischen Mathematik sind nämlich bei allgemeinen Approximationsproblemen bezüglich der Maximumsnorm Verfahren bekannt (z.B. Remesz-Algorithmus), welche eine große Ähnlichkeit zur Variation der Genaupunkte aufweisen. Sie beruhen jedoch auf der Vorgabe von  $n$  Punkten, wobei  $n$  gerade die Zahl der alternierenden Extrempunkte ist. Diese Vorgabe von  $n$  Punkten führt bei der Approximation durch Polynome oder ähnlich einfachen Funktionen zu linearen Gleichungssystemen, ist also im Gegensatz zur Vorgabe von mehr als 5 Genaupunkten bei Koppelkurven problemlos.

## 7 Nichtsymmetrische Tschebyscheff-Geradführungen

### 7.1 Herleitung der Synthesegleichungen

Dieser Abschnitt knüpft an die Frage aus Kapitel 1 an, ob es unsymmetrische Koppelkurven mit vollständig ausgeglichener Fehlercharakteristik gibt, und ob und in welcher Beziehung diese optimal sind. Bild 7.1 zeigt die prinzipielle Form einer solchen Kurve.

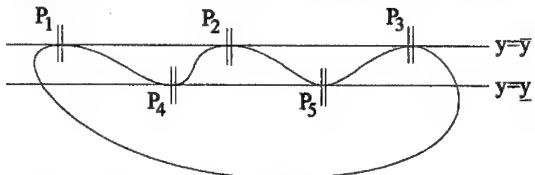


Bild 7.1 Tschebyscheff-Charakteristik einer nichtsymmetrischen Koppelkurve

Wählt man die 5 Punkte  $P_1, \dots, P_5$  beliebig, aber fest, so kann im allgemeinen kein Viergelenk gefunden werden, welches in diesen Punkten gleichzeitig eine waagerechte Tangente hat: Dies würde nämlich einer Vorgabe von  $5 \times 2 = 10$  Genaupunkten entsprechen, während ein Viergelenkgetriebe durch 9 Parameter festgelegt wird. Um die geforderte Charakteristik zu erzwingen, ist es jedoch nicht notwendig, die Abstände der 5 Punkte in x-Richtung vorzuschreiben, und auch der Abstand der Begrenzungsgeraden spielt zunächst keine Rolle. Dadurch werden 5 Freiheiten gewonnen, so daß sogar 4 Freiheiten bleiben. Daher könnte theoretisch zu jedem Viergelenk ein Punkt der Koppelebene existieren, dessen Koppelkurve eine vollständig ausgeglichene Fehlercharakteristik hat. Die hierzu zu lösenden Gleichungen werden nun hergeleitet. Bild 7.2 zeigt die verwendeten Bezeichnungen. Die Koppelkurve wird nicht wie üblich durch den Antriebswinkel  $\gamma$  parametrisiert, sondern durch den Hilfswinkel  $\gamma$ . Dadurch wird der Antriebswinkel für die Gleichungen nicht benötigt und die Synthesegleichungen vereinfachen sich. Die Ableitungen sind daher auch nicht nach  $\gamma$ , sondern nach  $\gamma$  zu bilden. Die Koordinaten der Gelenkpunkte werden zunächst als komplexe Zahlen dargestellt. Offenbar gilt:

$$K = l_2 e^{i(\alpha+\varphi)} + l_5 e^{i(\alpha+\gamma+\kappa)} \quad (7.1)$$

Daher gelten folgende Gleichungen:

$$x = l_2 \cos(\alpha + \varphi) + l_5 \cos(\alpha + \gamma + \kappa) \quad (7.2)$$

$$y = l_2 \sin(\alpha + \varphi) + l_5 \sin(\alpha + \gamma + \kappa) \quad (7.3)$$

Differentiation nach  $\gamma$  ergibt (die sich so ergebenden Formeln sind einfacher als bei Ableitung nach  $\phi$ ):

$$x' = -l_2 \varphi' \sin(\alpha + \varphi) - l_3 \sin(\alpha + \gamma + \kappa) \quad (7.4)$$

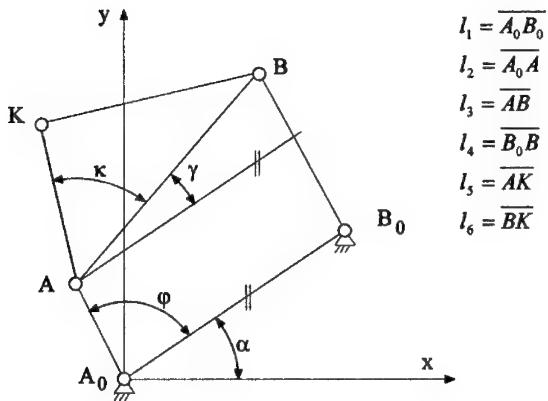
$$y' = l_2 \varphi' \cos(\alpha + \varphi) + l_3 \cos(\alpha + \gamma + \kappa) \quad (7.5)$$

Zunächst werden nur die y-Koordinaten und deren Ableitung benötigt. Die Masche A<sub>0</sub>-A-B-B<sub>0</sub> liefert folgende Beziehung zwischen  $\varphi$  und  $\gamma$ <sup>7</sup>:

$$|l_2 e^{i(\varphi)} + l_3 e^{i(\varphi+\gamma)} - l_1| = l_4 \quad (7.6)$$

Nach Quadrieren und Anwendung trigonometrischer Identitäten ergibt sich

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 - l_4^2 - 2l_1l_2 \cos(\varphi) - 2l_1l_3 \cos(\varphi + \gamma) + 2l_2l_3 \cos(\gamma) = 0 \quad (7.7)$$



$$\begin{aligned} l_1 &= \overline{A_0B_0} \\ l_2 &= \overline{A_0A} \\ l_3 &= \overline{AB} \\ l_4 &= \overline{B_0B} \\ l_5 &= \overline{AK} \\ l_6 &= \overline{BK} \end{aligned}$$

Bild 7.2: Bezeichnungen am Viergelenk; der Winkel  $\gamma$  dient zur Parametrisierung der Koppelkurve.

<sup>7</sup> Für die Maschengleichung kann die Drehung des Gestells gegenüber der x-Achse offenbar ignoriert werden, daher tritt  $\alpha$  in der Gleichung nicht auf.

Die Ableitung von (7.7) nach  $\gamma$  ergibt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} = \frac{l_3(l_2 \sin(\gamma) - l_1 \sin(\varphi + \gamma))}{l_1(l_2 \sin(\varphi) + l_3 \sin(\varphi + \gamma))} \quad (7.8)$$

Übrigens liefert diese Gleichung zusammen mit 7.4 und 7.5 die bekannte Tatsache, daß der Momentanpol mit den Schnittpunkt der beiden Geraden  $\overline{A_0A}$  und  $\overline{B_0B}$  übereinstimmt (vgl. Kapitel 5): Setzt man nämlich  $x'=y'=0$ , so folgt nach kurzer Rechnung  $\beta' = \pm l_5/l_2$  und danach  $\sin(\gamma + \kappa) = \sin(\varphi)$ . Also liegt der Pol auf  $\overline{A_0A}$  und damit aus Symmetriegründen auch auf  $\overline{B_0B}$ .

Angenommen, die Koppelkurve hat die Form aus Bild 7.1, dann gibt es drei Stellungen 1,2 und 3 mit  $y(\varphi_i) = \bar{y}$  und zwei Stellungen 4 und 5 mit  $y(\varphi_i) = \underline{y}$ . Diese Stellungen sind durch die Winkel  $\varphi_i$  und  $\gamma_i$  gegeben ( $i=1, \dots, 5$ ). Für jede der 5 Stellungen gelten die Gleichungen (7.3), (7.5) und (7.7), so daß insgesamt 15 Gleichungen zu lösen sind. Da das Viergelenk vorgegeben wird, ist die Koppelkurve durch die drei Größen  $\alpha$ ,  $\kappa$  und  $l_5$  bestimmt. Ferner sind die 10 Winkel  $\beta_i$  und  $\gamma_i$  variabel und die y-Koordinaten  $\bar{y}$  und  $\underline{y}$ . Damit gibt es auch genau 15 Unbestimmte.

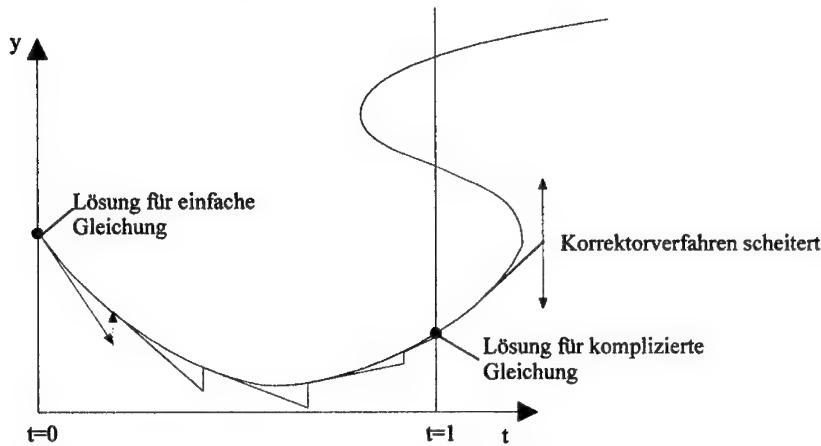
Besonders wichtig ist es, sicherzustellen, daß alle 5 Positionen paarweise voneinander verschieden sind: wählt man beispielsweise für alle 5 Positionen den Koppelpunkt mit maximaler y-Koordinate, so sind sonst die Synthesegleichungen trivialerweise erfüllt.

## 7.2 Erläuterung des Einbettungsverfahrens

Die Anwendung klassischer Nullstellen-Verfahren zur Lösung der oben dargestellten Gleichungen (z.B. Newton-Raphson) scheitert entweder an Konvergenzproblemen, oder die Lösungen konvergieren gegen die oben beschriebene triviale Lösung. Daher wurden Einbettungsverfahren verwendet [Mo87, AG90]. Die Idee dieses Verfahrens besteht darin, eine Gleichung als einen mehrdimensionalen Vektor anzusehen. Beispielsweise ist ein Polynom durch seine Koeffizienten gegeben, die man in einem Vektor zusammenfassen kann. Zwischen zwei Gleichungen (also Vektoren) kann man dann wie zwischen zwei Punkten eines Vektorraums eine Gerade oder andere Kurven definieren, die in der Regel durch die Zeit  $t$  parametrisiert werden. Allen Punkten dieser Kurve entspricht wieder eine Gleichung. Bewegt man sich entlang dieser Kurve, so ändert sich mit der Gleichung auch die Lösungsmenge stetig, d.h. die Lösungsmenge besteht aus einer Anzahl von Kurven. Entscheidend ist, daß man zwar die Lösungsmenge zu einer beliebigen Gleichung nicht kennt, wohl aber eine Anfangslösung einer besonders einfachen Gleichung und in jedem Punkt der

Kurve die Tangente. Diese kann nämlich durch implizite Differentiation ermittelt werden. Daher kann ähnlich wie bei der Lösung einer Differentialgleichung die Lösung zu einem beliebigen Zeitpunkt durch ein Prädiktor-Korrektor Verfahren ermittelt werden. Im Unterschied zur Lösung von Differentialgleichungen kann sichergestellt werden, daß die Näherungslösung stets beliebig dicht an der exakten Lösung bleibt, denn beim Korrektorschritt können die Kontraktionseigenschaften der ursprünglichen Gleichung genutzt werden.

Bild 7.3 zeigt den prinzipiellen Ablauf des Einbettungsverfahrens. Dabei ist  $y$  die Lösung der Gleichung in Abhängigkeit von  $t$ . Bei Gleichungen mit mehreren Unbekannten ist  $y$  ein Vektor. Der erste Prädiktor-Schritt wurde durch einen Pfeil markiert. Nach dem Prädiktor-Schritt folgt jeweils der Korrektorschritt (gestrichelter Pfeil in Bild 7.3). Dieser führt die Näherungslösung wieder dicht an die exakte Lösung. Dazu könnten auch direkt ein oder mehrere Schritte des Newton-Verfahrens angewendet werden: Wenn die Schrittweite  $t_i - t_{i-1}$  des Prädiktorverfahrens nicht zu groß war, ist nämlich der im Bild mit dem Pfeilende bezeichnete Startwert des Korrektorenverfahrens nahe genug an der Lösungskurve, so daß das Newton-Verfahren konvergiert. Tatsächlich gibt es bessere Korrektorenverfahren, die nicht wie in Bild 7.3 dargestellt  $t$  festhalten (also senkrecht verlaufen), sondern den Kurvenpunkt mit minimalem Abstand annähern (Bild 7.4: Korrektorschritt verläuft senkrecht zur Kurve). Dadurch können auch Probleme gelöst werden, bei denen die  $t$ -Komponente der Kurve nicht monoton wachsend ist [AG90]. Mathematisch wird das zu lösende Optimierungsproblem durch Bildung einer verallgemeinerten Inversen (für eine nicht quadratische Matrix) gelöst. Dieses Bild zeigt auch, daß die Krümmung der Kurve wesentlich für die Schrittweitensteuerung ist.



**Bild 7.3:** Einbettungsverfahrenen mit Newton-Schritt als Korrektorschritt

Beispiel: Zu lösen sei die Gleichung  $g(x) = x^n + x - 1 = 0$ . Diese Gleichung ist für  $n > 4$  nicht algebraisch lösbar. Daher betrachtet man die einfachere Gleichung  $f(x) = x^n - 1 = 0$ . Diese Gleichung wird durch die  $n$ -ten Einheitswurzeln<sup>8</sup> gelöst; die Rechnungen sind also mit komplexen Zahlen durchzuführen. Definiert man die Homotopie (Kurve zwischen den Gleichungen)  $H(x,t) = x^n + tx - 1$ , so gilt offenbar  $H(x,0) \equiv f(x)$  und  $H(x,1) \equiv g(x)$ . Die Abhängigkeit der Lösung  $x$  der Gleichung  $H(x,t) = 0$  von  $t$  liefert eine Kurve, und diese Kurve wird beim Einbettungsverfahren, beginnend mit einer der Lösungen der Gleichung  $f(x) = 0$  verfolgt, bis der Wert  $t=1$  erreicht ist. Dann hat man eine Lösung der ursprünglichen Gleichung gefunden. Mit dieser Methode können sogar alle Lösungen der Gleichung  $g(x)=0$  gefunden werden, indem zu allen  $n$  Lösungen von  $f(x) = 0$  die entsprechende Kurve verfolgt wird. Sind mehrere Gleichungen zu lösen, so liefern die Kombinationen aller Einheitswurzeln eine vollständige Lösung der Gleichung für  $t=0$ . In der Literatur wurden mit dem Einbettungsverfahren in erster Linie Systeme von Polynomgleichungen (wie das obige Beispiel) gelöst, aber natürlich lassen sich beliebige Gleichungen behandeln, solange implizite Differentiation möglich ist.

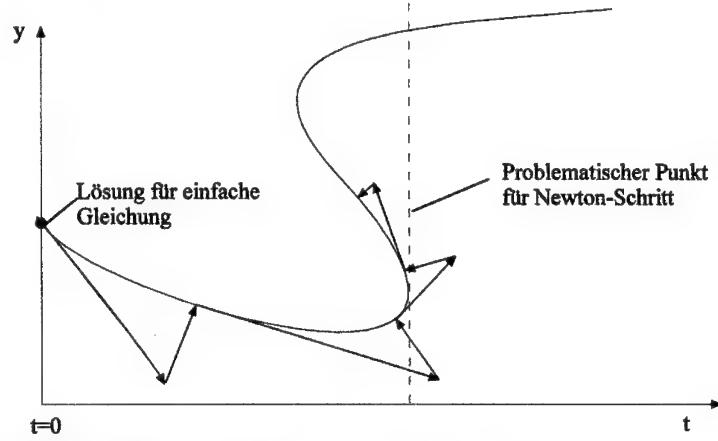


Bild 7.4: Einbettungsverfahren mit besserem Korrektorschritt

### 7.3 Anwendung des Einbettungsverfahrens

Die Anwendung von Einbettungsverfahren auf kinematische Probleme wurde zuerst von Wampler, Morgan und Sommese [WMS90,SF91] beschrieben. Sie ermittelten zu 9 vorgegebenen Genaupunkten alle Viergelenkgetriebe, deren Koppelkurve diese Punkte durchläuft. Dazu formten sie die Synthesegleichungen zu homogenen Polynomen um und

<sup>8</sup> Beispielsweise ist die imaginäre Einheit  $i$  eine 4-te Einheitswurzel, denn  $i^4 = 1$ . Die anderen 4-ten Einheitswurzeln sind:  $-1, -i$ , und  $i$ .

---

verfolgten alle Pfade. Eine Lösung zum Zeitpunkt  $t=1$  ist aber nur eine gültige Lösung des 9-Punkte-Problems, wenn alle Komponenten des Lösungsvektors reelle Zahlen sind. Da mehrere tausend Pfade verfolgt werden müssen und nur wenige zu reellen Lösungen führen, die dann wiederum daraufhin untersucht werden müssen, ob die Gelenkpunkte im gleichen Bewegungsbereich liegen und in der vorgegebenen Reihenfolge durchlaufen werden, sind diese Verfahren eher für theoretische Untersuchungen geeignet. Die im folgenden dargestellten Ergebnisse wurden teilweise bereits in [GaFu94] vorgestellt.

Bei der vorliegenden Aufgabe wurde die zu lösende Gleichung nicht als Polynom geschrieben, obwohl dies prinzipiell auch möglich ist. Statt dessen wurde ausgenutzt, daß für symmetrische Viergelenke die Lösung in Form der von Tschebyscheff angegebenen symmetrischen Koppelkurven mit vollständig ausgeglichener Fehlercharakteristik bereits bekannt ist. Dieses Verfahren hat folgende Vorteile:

- Es sind keine Berechnungen mit komplexen Zahlen nötig
- bei jedem Zwischenschritt ist bereits ein Geradführungsgtriebe vorhanden (vgl. Bild 7.5)
- geringerer numerischer Aufwand, denn nur eine Kurve muß verfolgt werden.

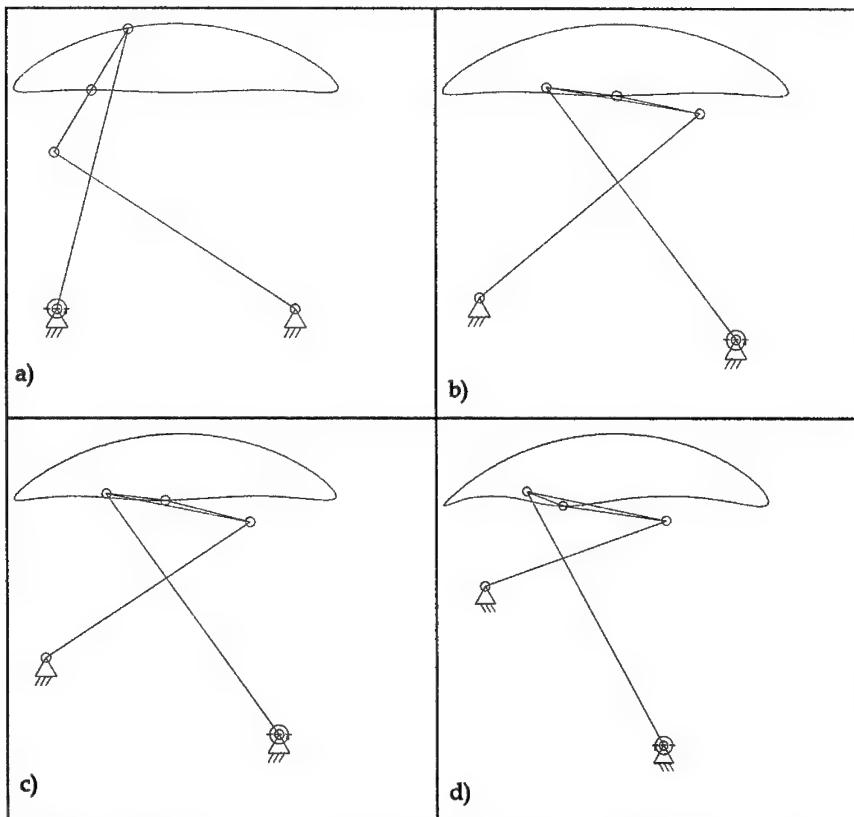
Dafür können aber auch nicht alle möglichen Lösungen ermittelt werden. Wenn also für ein gegebenes Viergelenk keine TGF durch das Einbettungsverfahren berechnet werden konnte, ist nicht gesagt, daß keine existiert. Möglicherweise können numerische Probleme die Verfolgung des Pfades verhindern, oder es gibt im reellen keinen Pfad, der die Lösung mit der symmetrischen Lösung verbindet!

Es sei also ein beliebiges Viergelenk mit den Längen  $l_1, l_2, l_3$  und  $l_4^*$  gegeben. Für  $l_2 = l_4^*$  ist das Getriebe bereits symmetrisch. Sonst betrachtet man die Homotopie, die durch

$$\begin{aligned} l_4(0) &= l_2^* \\ l_4(1) &= l_4^* \\ l_4(t) &= l_2 + t(l_4^* - l_2) \quad \text{für } t \in (0,1) \end{aligned} \tag{7.9}$$

gegeben ist. Offenbar gilt  $l_4(0) = l_2$  und  $l_4(1) = l_4^*$ . Diese Homotopie impliziert eine Homotopie der in 7.1 beschriebenen 15 Syntheseparameter und der Synthesegleichungen (7.3), (7.5) und (7.7). Dies bedeutet, daß durch 7.9 zu jedem  $t$  nicht nur das Viergelenk, sondern zusätzlich die den 5 Lagen zugeordneten Winkelpaare zum Vektor  $\vec{y}$  zusammengefaßt werden müssen. Dieser liefert dann entsprechend Bild 7.3 bzw. 7.4 ausgehend vom symmetrischen Getriebe die gesuchte Kurve. Daher müssen zu Beginn des

Verfahrens auch für das symmetrische Getriebe diese Winkel für die 5 Punkte mit waagerechter Tangente aus den Tschebyscheffschen Syntheseformeln berechnet werden.



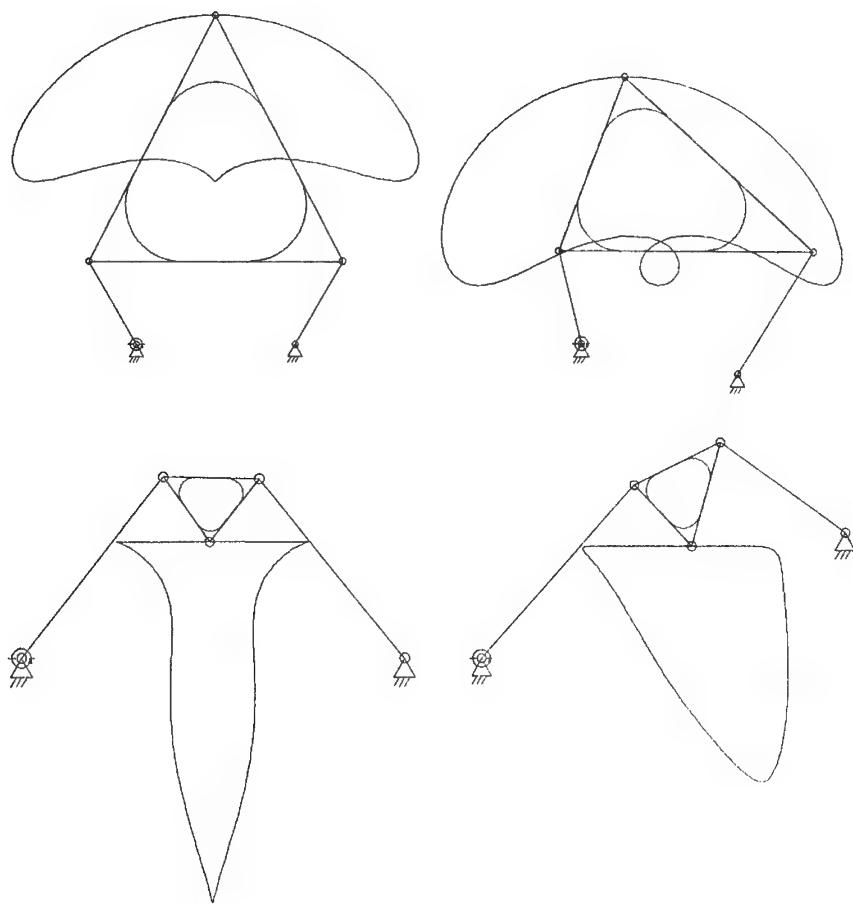
**Bild 7.5:** Deformation der Koppelkurve während des Einbettungsverfahrens

Bild 7.5 zeigt, wie ausgehend von einer symmetrischen Koppelkurve mit ausgeglichener Fehlercharakteristik im Verlauf des Einbettungsverfahrens eine nichtsymmetrische Kurve entsprechender Form ermittelt wird. Die Maße dieser Getriebe sind in Tabelle 7.1 aufgeführt:

Kurve	A <sub>0</sub> A	B <sub>0</sub> B	A <sub>0</sub> B <sub>0</sub>	AB	AK	BK
a	240.0	240.0	200.0	120.0	60.000	60.000
b	240.0	220.0	200.0	120.0	54.530	65.598
c	240.0	200.0	200.0	120.0	48.651	71.598
d	240.0	161.9	200.0	120.0	32.863	87.725

**Tabelle 7.1:** Maße der Getriebe aus Bild 7.5

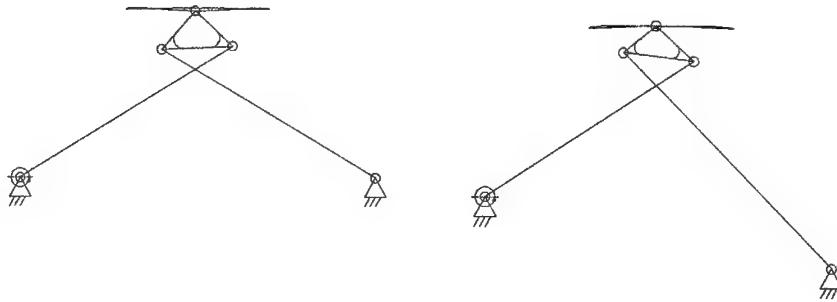
Die folgenden Bilder zeigen jeweils das symmetrische Ausgangsgetriebe und das unsymmetrische Getriebe. Es zeigt sich, daß in der Regel die Geradführungsgüte beim symmetrischen Getriebe etwas besser ist. Dafür können der Platzbedarf und die Anordnung der Gestellpunkte beim unsymmetrischen Getriebe besser sein (siehe Bild 7.6 unteres Beispiel).



**Bild 7.6:** Symmetrische (links) und durch Deformation daraus entstandene unsymmetrische Tschebyscheff-Geradführungen (rechts)

Während der Deformation treten auch qualitative Änderungen der Form der Koppelkurve auf. Beispielsweise tritt oben ein neuer Doppelpunkt auf, und unten geht die Spitze verloren. Die durch mehrere Funktionen gegebene Einteilung der symmetrischen TGF in qualitativ

unterschiedliche Koppelkurvenformen [STo85, To89] kann also nicht genutzt werden. Bild 7.7 zeigt, daß es auch nichtsymmetrische vollständige Geradführungen gibt. Während das Ausgangsgetriebe jedoch eine sogenannte „geschlossene Geradführung“ ist [GaTo88], bei der die Koppelkurve jede der beiden Begrenzungsgeraden dreimal berührt, liegt bei der durch das Einbettungsverfahren ermittelten Koppelkurve eine waagerechte Tangente zwischen diesen Geraden. Will man auch für nichtsymmetrische Getriebe eine geschlossene Geradführung erzwingen, so ist ein zusätzlicher Punkt  $P_6$  mit den entsprechenden Gleichungen zu berücksichtigen. Dann kann aber nicht jedes beliebige Viergelenk ausgewählt werden.



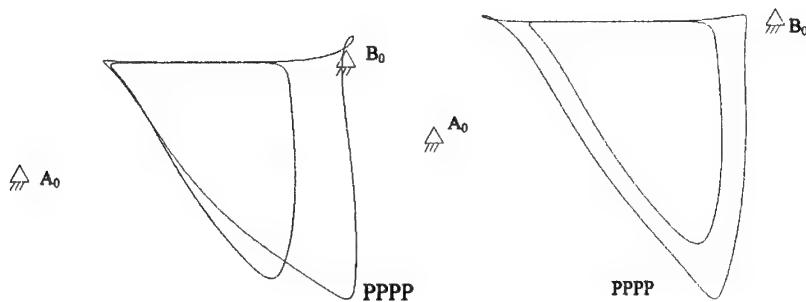
**Bild 7.7:** Vollständige Tschebyscheff-Geradführungen

#### 7.4 Vergleich mit anderen Geradführungen

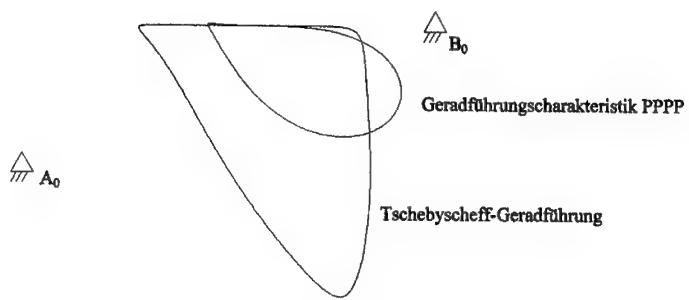
Zunächst wurde untersucht, ob und in welcher Hinsicht nichtsymmetrische TGF optimal sind. Dabei wurde der Kennwert  $b$  vorgegeben, also die auf die Geradführungslänge bezogene Breite der Koppelkurve. Dann wurde zunächst nur der Koppelpunkt (also  $\kappa$  und  $l_s$ ) variiert und mit den Programmen aus 3.8 der optimale Geradführungsabschnitt ermittelt. Dabei erwies sich die Güte der TGF als lokal optimal. Wurden alle Getriebeparameter variiert, so ergaben sich manchmal bei sehr langer Laufzeit leichte Verbesserungen, und zwar in Richtung zu einem symmetrischen Getriebe. Obgleich in den meisten Fällen sämtliche Getriebe, die bei der Deformation zur Synthese der TGF berechnet wurden, dann eine höhere Güte als das betrachtete Getriebe haben, wenn dies auch für das symmetrische Ausgangsgetriebe gilt (die Gütfunktion hat i.A. während des Einbettungsverfahrens kein Extremum), wurden sie also bei der Optimierung nicht gefunden (Konvergenzprobleme bei numerischer Optimierung bezüglich der Maximumsnorm). Wird jedoch der Platzbedarf des Getriebes mitberücksichtigt, also  $b^0$  betrachtet, so sind etliche nichtsymmetrische Getriebe besser (vgl. Bild 7.6).

Ferner wurden die ermittelten Koppelkurven mit Geradführungen mit unendlich benachbarten Genaupunkten verglichen. Bild 7.8 zeigt jeweils eine TGF und eine mit den Programmen aus Kapitel 5.2 berechnete Koppelkurve. Dabei wurden zunächst die Gestellpunkte der TGF vorgegeben und der Ballsche Punkt in die Mitte dieser Geradführung gelegt; die betrachteten Viergelenke sind also verschieden. Der freie Parameter  $T$  wurde so gewählt, daß Geradführungslänge und -güte etwa übereinstimmen. In diesem Fall ist die Koppelkurve mit Ballschem Punkt wesentlich größer und hat eine ungünstige Form, wenn die gesamte Koppelkurve genutzt werden soll. Nur bei wesentlich kürzerer Geradführungslänge (Bild 7.9) wird die Breite der Koppelkurve mit Ballschem Punkt kleiner als die der TGF.

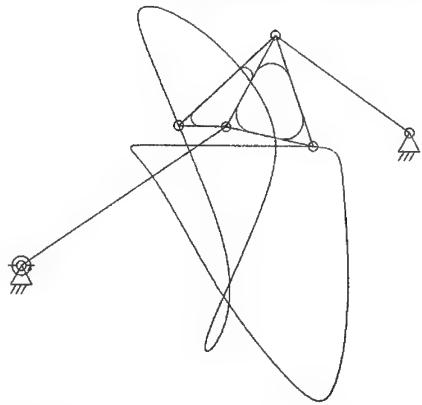
Die Bilder 7.10 und 7.11 zeigen eine weitere Möglichkeit des Vergleichs dieser Geradführungstypen. Dabei wurde zu einer Stellung der synthetisierten TGF der Ballsche Punkt ermittelt und auch dessen Koppelkurve eingezeichnet; hier stimmen die betrachteten Viergelenke also überein. Die Koppelkurve der TGF verläuft im Geradführungsbereich jeweils horizontal. Der Ballsche Punkt zu der Stellung in der Mitte der TGF liegt immer relativ dicht am Koppelpunkt der TGF (Bild 7.11), während dies am Ende der Geradführung nicht gilt (Bild 7.10). Dementsprechend ähneln sich die Koppelkurven in Bild 7.10 überhaupt nicht mehr; obendrein ist hier auch die Geradführungsgüte der Koppelkurve mit Ballschem Punkt deutlich schlechter.



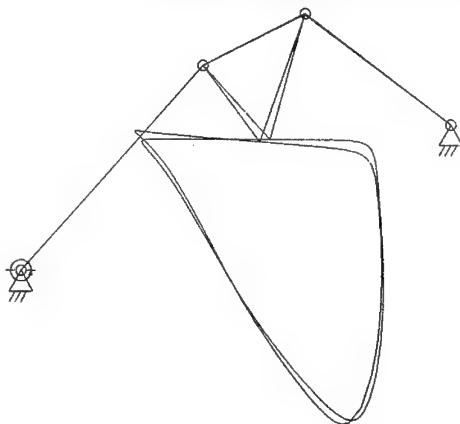
**Bild 7.8:** Vergleich von Tschebyscheff-Geradführungen (innere Koppelkurve) mit Geradführungen gleicher Güte vom Typ PPPP für gleichen GF-Mittelpunkt



**Bild 7.9:** Vergleich einer Tschebyscheff-Geradführung mit einer Geradführung vom Typ PPPP (gleicher GF-Mittelpunkt)



**Bild 7.10:** Der Ballsche Punkt am Ende der Tschebyscheff-Geradführung (gleiches Viergelenk) liefert eine völlig andersartige Koppelkurve.



**Bild 7.11:** Der Ballsche Punkt in der Mitte der TGF (gleiches Viergelenk) ergibt eine sehr ähnliche Koppelkurve.

## 7.5 Vorgabe von Kennwerten

Durch Betrachtung weiterer charakteristischer Punkte  $P_i$  können beim Einbettungsverfahren auch Kennwerte vorgegeben werden. Direkt übertragbar sind jene Punkte, bei denen x- oder y-Werte der Koppelkurve lokale Extrema haben. Damit können die Geradführungslänge oder die Breite und Höhe der Koppelkurve vorgegeben werden. Die Zahl der zu lösenden Gleichungen erhöht sich aber für jeden zusätzlichen Punkt um 3. Entsprechend der Anzahl von Gleichungen und Variablen kann dann natürlich nicht mehr ein beliebiges Viergelenk vorgegeben werden. Der numerische Aufwand wächst zudem mit der dritten Potenz der Anzahl der Gleichungen. Deshalb wurde eine Datei mit TGF angelegt, die zu einem Gitter von Viergelenkgetrieben Maße und Kennwerte der berechneten Getriebe enthält. Bei Vorgabe von Kennwerten wird zunächst aus dieser Datei die beste Startlösung ermittelt. Die Differenz der Kennwerte dieses Getriebes zu den Vorgaben ermöglicht bereits eine Einschätzung, ob die Vorgaben mit TGF überhaupt zu verwirklichen sind. Dadurch konnten die Rechenzeiten deutlich reduziert werden.

Die Formenvielfalt von Koppelkurven mit vollständig ausgeglichener Fehlercharakteristik ist im Vergleich zu Geradführungen mit unendlich benachbarten Genaupunkten relativ beschränkt: Beispielsweise können bei nicht rückläufigen Koppelkurven außerhalb des Geradführungsbereichs keine Wendepunkte auftreten, da die Koppelkurve eines Viergelenks maximal 4 Wendepunkte haben kann. Dadurch wird beispielsweise die Vorgabe von zusätzlichen Genaupunkten oder Tangenten stark eingeschränkt. Andererseits ist für viele Anwendungen eine D-förmige Koppelkurve gerade erwünscht. Außerdem ist die Anzahl der frei wählbaren Parameter zur Verwirklichung zusätzlicher Vorgaben (bis auf Ähnlichkeit) 4 statt 5, denn der Ballsche Punkt existiert in jeder beliebigen Stellung.

Daher sollte man TGF besonders dann in Betracht ziehen, wenn

- die Güte besonders wichtig ist,
- der Platzbedarf klein sein soll,
- eine D-förmige Koppelkurve erwünscht ist,
- nicht zuviele weitere Genaupunkte vorgegeben sind.
- Die Aufgabenstellung darf keine weiteren Wendepunkte, Doppelpunkte oder Spitzen erzwingen.

## **8 Zusammenfassung und Ausblick**

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden Geradführungen durch Viergelenkgetriebe mit Drehgelenken untersucht.

Die entwickelte Systematik ermöglicht die Bewertung und damit erst die Optimierung von Getrieben bei gegebenen Geradführungsaufgaben. Die vorliegenden Tabellen liefern Hinweise, für welche Aufgabenstellungen welche Kennwerte von besonderer Bedeutung sind, und welche Verfahren aus der Literatur zur Synthese in Betracht kommen. Diese Aufzählungen und Tabellen lassen sich auch als Expertenwissen auffassen, welches durch ein Expertensystem dem Konstrukteur zur Verfügung gestellt werden kann. In vielen Fällen kann jedoch kein eindeutiges bestes Lösungsprinzip bzw. Syntheseverfahren angegeben werden. Es ist aber möglich, eine Reihenfolge aussichtsreicher Verfahren, beginnend mit einfachen Verfahren, anzugeben. Sollen die Ergebnisse dieser Arbeit in ein Expertensystem integriert werden, so sollten in jedem Fall unscharfe Regeln möglich sein. Ferner sind die Regeln in mehreren Stufen zu organisieren: Zunächst müssen ausgehend von der Aufgabenstellung die wesentlichen Kennwerte aufgezeigt werden. Dann müssen Verfahren vorgeschlagen werden, welche eine gute Startlösung für ein Optimierungsverfahren liefern. Hier kommen nach Ansicht des Verfassers insbesondere drei verschiedene Syntheseverfahren in Betracht:

- Vorgabe von 5 endlich benachbarten Lagen
- Geradführungen mit unendlich benachbarten Punkten und Vorgabe der Gestellpunkte
- Auswahl von Tschebyscheff-Geradführungen aus einer Datenbank

Neue theoretische Ergebnisse wurden insbesondere für die letzten beiden Verfahren erzielt. So wurden die Synthesegleichungen von [Han93] für die Vorgabe beider Gestellpunkte und des Ballschen Punktes analytisch gelöst und auf Kreisführungen und Getriebe mit Schubgelenken ausgedehnt. Damit steht für eine große Anzahl praktisch bedeutsamer Aufgaben, die ansonsten dem Konstrukteur durch eine kaum überschaubare Vielfalt von Syntheseverfahren nur schwer zugänglich sind, ein einfaches Formelsystem zur Verfügung.

Das wichtigste Ergebnis der vorliegenden Arbeit ist jedoch der Nachweis der Existenz von Tschebyscheff-Geradführungen mit unsymmetrischer Koppelkurve. Wie bei symmetrischen Getrieben erweist sich ihre Güte im allgemeinen als derjenigen von Geradführungen mit unendlich benachbarten Punkten überlegen. Der Nachteil der aufwendigen Synthese mit dem vorgestellten Einbettungsverfahren kann durch Speicherung in einer Datenbank gemildert

werden. Auf diesem Gebiet sind weitere Forschungsarbeiten zur Beantwortung folgender Fragen nötig:

- Wie kann die Geschwindigkeit des Einbettungsverfahrens gesteigert werden
- Kann die Lagentheorie zur Herleitung von Synthesegleichungen mit weniger Unbekannten verwendet werden?
- Kann die algebraische Gleichung der Koppelkurve ausgenutzt werden?
- Wie können Nebenbedingungen am besten berücksichtigt werden?

Gleichzeitig könnten die hier dargestellten Verfahren auch in anderen Bereichen der Getriebesynthese angewendet werden:

- Am Institut für Konstruktions- und Fertigungstechnik der Universität der Bundeswehr Hamburg wurden in der Vergangenheit etliche besonders benutzerfreundliche Module zur Getriebeanalyse und Synthese erstellt. Beispielsweise kann der Konstrukteur interaktiv Bewegungsgesetze einer Kurvenscheibe verändern und gleichzeitig die Veränderung der Kontur oder von Kennwerten verfolgen. Für viele Syntheseaufgaben ist ein solches Vorgehen kaum möglich, da es oft keine Algorithmen gibt, die eine direkte Vorgabe jener Größen ermöglichen, die besonders wichtig sind. Bedenkt man jedoch, daß beim interaktiven Verändern eines Punktes oder Wertes mit Hilfe etwa der Maus sich der Wert des zu findenden Getriebes nur allmählich ändert, so wird deutlich, daß die Veränderung dieses Wertes gerade der Homotopie beim Einbettungsverfahren entspricht. Ist also erst einmal eine Lösung für eine Kombination von Vorgabeparametern bekannt, so können diese Vorgaben durch Anwendung des Einbettungsverfahrens leicht interaktiv verändert werden. Es wird also quasi die Auflösung der Synthesegleichungen nach jeder beliebigen Parameterkombination (bei ausgleichener Wertigkeitsbilanz) möglich.
- Die Optimierung bezüglich der Tschebyscheff-Norm kann auf Übertragungsaufgaben oder für andere Führungsaufgaben übertragen werden. Möglicherweise können dann weitere kontinuierliche Optimierungsaufgaben bezüglich der Maximumsnorm durch Betrachtung endlich vieler Positionen gelöst werden.
- Einfache algebraische Überlegungen zeigen, daß es Koppelkurven der in Bild 8.1 dargestellten Charakteristik gibt: es fallen nämlich für einen Punkt die drei Gleichungen (7.3), (7.5) und (7.7) fort, aber nur die beiden Unbekannten  $\phi_3$  und  $\gamma_3$ . Also erhält man ein Gleichungssystem mit 12 Gleichungen und 13 Unbestimmten, welches in der Regel eine einparametrische Lösung liefert. Jeder solchen Lösung entspricht aber ein Punkt in der Koppelebene und die Menge aller solchen Lösungen bestimmt eine Kurve in der Koppelebene. Es stellt sich die Frage, in welcher Beziehung diese Kurve beispielsweise zur Ballschen Kurve steht, und ob beide Kurven möglicherweise ein Gebiet einschließen, welches für Geradführungszwecke besonders geeignet ist. Da der Koppelpunkt für Geradführungen mit Tschebyscheff-Charakteristik auch auf dieser Kurve liegt, könnte diese Kurve wiederum mit Hilfe von Einbettungsverfahren, diesmal ausgehend von

nichtsymmetrischen Geradführungen mit vollständig ausgeglichener Fehlercharakteristik, berechnet werden.

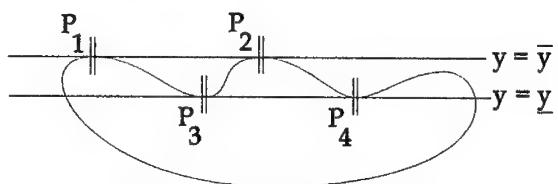


Bild 8.1: Verallgemeinerung der Tschebyscheff-Charakteristik

Ebenso, wie Tschebyscheff-Geradführungen als Verallgemeinerung von 6-punktigen Geradführungen betrachtet werden können, sind solche Koppelkurven eine Verallgemeinerung von 5-punktigen Geradführungen. Dementsprechend ist vermutlich ihre Güte geringer, ihre Form jedoch variabler.

---

## 9 Literaturverzeichnis

- [AG90] Allgower, E. L.; Georg, K.: Numerical Continuation Methods. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1990.
- [An 76] Antuma, Jr.H.J.: Triangulaire Nomogrammen voor de Symmetrische Koppelkrommen. C.F.T. Centre für technology PHILIPS, Eindhoven 1976.
- [BE 77] Birnbaum, T.; Böttger, T.; Ganer, K.; Kohl, F.; Luckenbacher, F.; Ludwig, R.; Mathes, O.; de Roth, K.; Böllner, R.; Zöllner, R.: Das neue Buch der Erfindungen, Gewerbe und Industrien. Band 2: Die Kräfte der Natur und ihre Benutzung. Siebente (Pracht-) Auflage, Verlagsbuchhandlung Otto Spamer, Leipzig 1877.
- [BeSch96] Berger, M.; Schönherr, J.: Auslegung und Steuerung von mechatronischen Punktführungsgtrieben mit Hilfe der Fourierapproximation. VDI-Berichte Nr. 1281, 1996.
- [Bl 51] Bloch, S.Sch. : Angenäherte Synthese von Mechanismen. VEB Verlag Technik, Berlin 1951.
- [Br80] Braune, R.: Das Projekt Genesys – Zielsetzung und Realisierungsstand eines neuen umfassenden Software-Systems für die Entwicklung ungleichmäßig übersetzender Getriebe. VDI-Berichte Nr. 1281, Düsseldorf.
- [Br80] Braune, R.: Ein Beitrag zur Maßsynthese ebener viergliedriger Kurbelgetriebe. Dissertation RWTH Aachen, 1980.
- [BL91] Braune, R.; Lücke, J.: MOSYS - Ein Programmsystem zur Rechnerintegrierten Auslegung von Ebenen Koppelgetrieben. 8. IFTOMM World Congress (1991).
- [Br91] Bretschneider, L.: Entwicklung eines CAD-orientierten Verfahrens zur Analyse von Bewegungsabläufen in ebenen Getrieben. Dissertation Universität der Bundeswehr, Hamburg 1991.
- [BK81] E. Brieskorn, H. Knörr: Ebene algebraische Kurven. Birkhäuser, Boston 1981.
- [BS84] I.N. Bronstein, K. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik. Interdruck Leipzig 1984.
- [Ca64] Meyer zur Capellen, W.: Analytische Darstellung symmetrischer Koppelkurven. Forschungsberichte Nordrhein-Westfalen Nr. 1409. Köln und Opladen, Westdeutscher Verlag 1964.
- [Ca57] Meyer zur Capellen, W.: Konstruktion von fünf- und sechspunktigen Geradführungen in Sonderlagen des Gelenkvierecks. Konstruktion 9, S. 344 - 351, Heidelberg 1957.
- [CW71] Collatz, L., Wetterling, W.: Optimierungsaufgaben. Springer Verlag 1971.

- [DF77] E. Denert, R. Frank: Datenstrukturen. Bibliographisches Institut , Zürich.
- [Di64] Dijksman, E.A.: Synthese von stangenvierziden met V-vormige, symmetrische Koppelkrommen. Dissertation Eindhoven 1964.
- [Di76] Dijksman, E.A.: Motion geometry of mechanisms. London, New York, Melbourne, Cambridge University Press 1976.
- [Di72] Dijksman, E. A.: Approximate straight-line mechanisms through four-bar linkages. Romanian Journal of Technical Sciences, Applied Mechanics 2, Vol. 17 (Bukarest 1972), S. 319 - 372
- [D96] Dittrich, G: Die Struktursynthese am Anfang der Auslegung von Getrieben. VDI-Berichte Nr. 1281, Düsseldorf 1996.
- [DBF83] Dittrich, G.; Braune, R.; Franzke, W.: Algebraische Maßsynthese ebener viergliedriger Kurbelgetriebe. Fortschrittsberichte, VDI-Z, Reihe 1, Nr. 109, Düsseldorf 1983.
- [EnMü86] Engeln-Müllges, G.: Formelsammlung zur Numerischen Mathematik mit Standard-FORTRAN77 - Programmen, BI Mannheim 1986.
- [E79] Ereslan, N.F.: On the Synthesis of Certain Straight-Line Mechanisms. Mechanism and Machine Theory Bd. 14 (1979) Nr. 5, S. 299-307.
- [FeSTo] Feldvoss, J.; Schlüter, O.; Tolle, P.: unveröffentlichte Untersuchungen über symmetrische Geradführungen mit optimaler Geschwindigkeitskonstanz und minimaler Querbeschleunigung.
- [FP81] Freudenstein, F.; Primrose, E. J. F.: On the ball point associated with finite coplanar displacements of a rigid body. Mechanism and Machine Theory, Vol. 16 (1981), No. 4, S.. 267 - 275
- [FHG94] Funk, W.; Han, J.; Gassmann, V.: Ein neues Verfahren zur Maßsynthese ebener Gelenkgetriebe für angenäherte Geradführungen durch vier bzw. fünf unendlich benachbarte Punkte. VDI-Bericht 1111, S. 173-184, Düsseldorf 1994, VDI-Verlag.
- [Fu94] Funk, W.: Rechnerunterstützte Synthese von Geradführungsgtrieben. Konstruktion 46, 1994, S. 365-370.
- [Fl69] Fletcher, R.: Optimization, Symposium of the Institut of Mathematics and Its Applications, Academic Press, London 1969.
- [FP81] Freudenstein, F. and Primrose, E.J.F.: On the Ball Point Associated with Finite Coplanar Displacements of a Rigid Body, Mechanism and Machine Theory, Vol.16(1981), No.4, S.267-275.
- [GaTo88] Gassmann, V., Tolle, P.: Geschlossene Geradführungen. Industriezeiger 36 (1988), S. 26-28.

- 
- [GaTo90] Gassmann, V., Tolle, P.: Algorithmen zur Approximation ebener Kurven mit Kreisbögen gleicher Tangente in den Anschlußpunkten.  
VDI-Bericht 847, S. 155-172, Düsseldorf 1990, VDI-Verlag.
- [GaFu94] Gassmann, V.; Funk, W.: Unsymmetric four-bar straight-line mechanisms with completely balanced deviation.  
Proc. of the 23rd ASME Mechanisms Conference 1994.
- [GiGS] Gierse, D. Günzel, T. Schaeffer: Untersuchung und Klassifizierung von Maßsynthese-Verfahren für die Bestimmung der Kinematik ebener Führungs-gelenkgetriebe. VDI-Fortschrittsberichte, Reihe 1, Nr. 218, Düsseldorf 1993.
- [Gi94] Gierse, D: Sitzung vom VDI-Richtlinienausschuß A202 „Ebene Gelenkgetriebe“.
- [Gü94] D. Günzel: Ein Beitrag zur rechnerunterstützten Typ- und Maßsynthese ungleichmäßig übersetzender Mechanismen und Getriebe.  
VDI-Fortschrittsberichte, Reihe 1, Nr. 232, Düsseldorf 1994.
- [Ha61] Hain, K.: Angewandte Getriebelehre. VDI-Verlag, Düsseldorf 1961.
- [Ha66] Hain, K.: Der Entwurf gleichschenkliger Gelenkvierecke für gegebene symmetrische Koppelkurven. Konstruktion 18 (1966), Heft 10, S. 397-402.
- [Ha75] Hain, K. :Synthese des Gelenkvierecks für Geradführungen hoher Genauigkeit mit Hilfe von Kleincomputern. Technica 24(1975), Heft 4, S.223-228 und 235-238.
- [Ha81] Hain, K. : Rechenprogramme für Gelenkviereck-Geradführungen.  
Technica 26, (1981), S. 2471-2474.
- [Ha82] Hain, K.: Getriebekonstruktionen mit Parallelgeradführungen.  
Technica 31 (1982), S. 982-987.
- [Ha84] Hain, K.: Gelenkgetriebe für die Handhabungs- und Robotertechnik, Vieweg Programmabibliotheque Microcomputer Bd. 17, Braunschweig/Wiesbaden 1984.
- [Ha87] Hain, K.: Getrieberechnungen für hohe Ansprüche mit Ausnutzung der Koppelkurven-Krümmungen,  
Fortschritt-Berichte VDI NR. 155, VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 1987.
- [HaG75] Hain, K. und M. Graef: Computergestützte Getriebesynthese mit geometrischen Grundlagen für Gelenkviereck-Geradführungen. Konstruktion 27 (1975).  
Teil 1: Kinematische Grundlagen. Heft 3, S. 81-83.  
Teil 2: Praktische Nutzanwendungen. Heft 4, S. 125-131.
- [Han93] Han, J.: Ein Beitrag zur rechnerunterstützten Maßsynthese ebener Gelenkgetriebe für angenäherte Geradführungen durch vier bzw. fünf unendlich benachbarte Punkte.  
Dissertation Universität der Bundeswehr, Hamburg 1993.

- [HJ94] Heinrich, E.; Janetzko, H.D.: Das Mathematica Arbeitsbuch. Vieweg 1994.
- [He93] Heck, Andre: Introduction to Maple. Springer-Verlag 1993.
- [Hu78] Hunt, K. H.: Kinematic geometry of mechanisms. Clarendon Press, Oxford, 1978.
- [Hen92] Henkel, F.: Erstellen eines CAD-Programmsystems zur Synthese von Getrieben zur exakten Geradführung eines Punktes. Diplomarbeit an der Universität der Bundeswehr, Hamburg 1992.
- [Ih66] Ihme, W.: Zur Ermittlung der Abmessungen von Geradführungsmechanismen unter Verwendung des Ball'schen Punktes. Maschinenbautechnik (Getriebetechnik), 15 (1966), H. 5, S. 265 - 273.
- [Ih76] Ihme, W.: Zur Ermittlung von Geradführungsmechanismen. Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden, 25 (1976), H. 3, S. 547 - 551.
- [Ih78] Ihme, W.: Qualitative und quantitative Untersuchungen an Koppelgetrieben mit vierpunktiger Geradführung. Maschinenbautechnik, 27 (1978), H. 2, S. 81 - 85.
- [Ih91] Ihme, W.: Ein Beitrag zur Ermittlung von Geradführungsgetrieben unter Einbeziehung der Computertechnik. Proc. of the Eighth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Prag, Tschechoslowakei, Vol. 4 (1991), S. 949 - 952.
- [Is78] Israel, G.-R.: Geradführungen in sechsgliedrigen Koppelgetrieben. Maschinenbautechnik 27 (1978) 11, S. 504-527.
- [Is76] Israel, G. R.: Angenäherte Geradführungen durch viergliedrige Koppelgetriebe. Maschinenbautechnik 25 (1976) 11, S. 520-525.
- [ISY90] Benutzerhandbuch PROREN 1. ISYKON Software GmbH, 1990.
- [KF89] Knoop, J; Funk, W.: CAD-nahe Entwicklung eines Programmsystems zur Ermittlung der Kinematik ungleichförmig übersetzender Getriebe. VDI-Bericht Nr. 736, S. 49-63, VDI-Verlag Düsseldorf 1989.
- [Kn88] Knoop, J: Analyse und Synthese der Kinematik ungleichförmig übersetzender Getriebe mit Hilfe von CAD-Systemen. Proceedings of the IASTED International Symposium „Applied Informatics“, AI 88 Grindelwald, 1988, S. 41-44.
- [Kn90] Knoop, J: Anforderungsprofil an ein in ein CAD-System integrierten Kinematik-Modul. DFG-Bericht zum Vorhaben Kn 272/1-1, April 1990.
- [Ko94] Kopp, F.O.: Vorteilhafte ebene Koppelgetriebe zur Erzeugung von D-förmigen Koppelkurven- Kinematische Drahtobjekte: Schreitmaschinen. VDI-Bericht 1111, S. 299-332, Düsseldorf 1994, VDI-Verlag 1994.
- [Kp73] Kepler, H.B.: Basic Graphical Kinematics. McGraw-Hill, USA 1973.

- 
- [Kin93] Kinzinger, R.: Eine CAD-Expertensystem-Kopplung - dargestellt am Beispiel der Lösung von Bewegungsaufgaben. Dissertation Universität der Bundeswehr, Hamburg 1993.
- [KiFu92] Kinzinger, R.; Funk, W.: Die Lösung von Bewegungsaufgaben - ein Objekt wissensbasierter Rechnerunterstützung? VDI-Bericht 958, S. 51-72, Düsseldorf 1992, VDI-Verlag.
- [Kr55] Kraus, R.: Geradführungen durch das Viergelenk. Deutscher Ingenieur-Verlag, Düsseldorf 1955.
- [Li63] Lichtenheld, W.: Konstruktionslehre der Getriebe. Akademie-Verlag, Berlin 1963.
- [Lo86] Lohse, P.: Getriebesynthese – Bewegungsabläufe ebener Koppelmechanismen. Springer-Verlag, Heidelberg, 1986.
- [LuMo90] Luck, K.; Modler, K.-H.: Getriebetechnik: Analyse, Synthese, Optimierung. Akademie-Verlag Berlin, 1990.
- [LuMo95] Luck, K.; Modler, K.-H.: Getriebetechnik: Analyse, Synthese, Optimierung. Springer-Verlag Berlin, 1995.
- [Lü91] Lücke, J.: Kombination von Genaulagensynthese und allgemeiner Optimierung zur Auslegung von Koppelgetrieben. Dissertation Universität Hannover 1991.
- [Lü92] Lücke, J.: Kombination von Genaulagensynthese und allgemeiner Optimierung zur Auslegung von Koppelgetrieben. Fortschritt-Berichte VDI Nr. 205, VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf, 1992.
- [Mo95] K.H. Modler: Geradführungen bei symmetrischen Koppelkurven. Vortrag beim Ehrenkolloquium für Prof. J. Volmer, Zwickau 1995.
- [Mo87] Morgan, A. P: Solving Polynomial Systems Using Continuation for Engineering and Scientific Problems. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1987).
- [Mü97] Müller, R.: Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Band 42(1897), No.5, S.247-271.
- [Mü98] Müller, R.: Über die angenäherte Geradführung mit Hilfe eines ebenen Gelenkvierecks. Zeitschrift für hohe Mathematik und Physik, 43 (1898), S. 36 - 40.
- [Pa79] B. Paul: Kinematics and Dynamics of Planar Machinery. Prentice-Hall, New Jersey 1979.
- [RH65] K. Rauh, L. Hagedorn: Praktische Getriebelehre, Band 1. Springer-Verlag, Berlin 1965.

- [Sch95] J. Schönherr: Punktführungen - elektronische Berechnung und mechatronische Erzeugung. Vortrag beim Ehrenkolloquium für Prof. J. Volmer, Zwickau 1995.
- [SF91] Subbian, T.; Flugrad Jr., D. R.: Use of Continuation Methods for Kinematic Synthesis. 8th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms (1991), S. 221-224.
- [SR87] Suh, C. H.; Radcliffe, C. W.: Kinematics and mechanisms design. Robert E. Krieger Publishing Company, Inc., Florida, 1987.
- [STo85] Schlüter, O., Tolle, P.: Auswahlkriterien für symmetrische Gelenkviereck-Geradführungen. VDI-Bericht 676, S. 181-201, Düsseldorf 1985, VDI-Verlag.
- [St60] Stiefel, E.: Note on Jordan elimination, linear programming and Tchebycheff approximation. Zeitschrift für Numerische Mathematik 2 (1960), S. 1-17.
- [SR87] Suh, C.H., Radcliffe, C.W.: Kinematics and Mechanisms Design. USA, 1987.
- [Re73] Rechenberg, I.: Evolutionsstrategie: Optimierung technischer Systeme nach den Prinzipien der biologischen Evolution. Frommann-Holzboog Verlag, Stuttgart 1973.
- [TeWo60] Tesar, D.; Wolford, J. C.: Four-bar straight line mechanisms for designing mechanisms, Transactions of the Sixth Conference on Mechanisms, Purdue University, 1960, S. 87 - 93.
- [TeWo62] Tesar, D.; Wolford, J. C.: Five-point exact four-bar straight-line mechanisms, Transactions of the Seventh Conference on Mechanisms, Purdue University, 1962, S.. 30 - 38.
- [TeV67I] Vidusic, J. P.; Tesar, D.: Selections of four-bar mechanisms having required approximate straight-line outputs, part I. the general case of the Ball-Burmester point, Journal of Mechanisms, Vol. 2 (1967), S.. 23 - 44.
- [TeVW67II] Tesar, D.; Vidusic, J. P.; Wolford, J. C.: Selections of four-bar mechanisms having required approximate straight-line outputs, part II, the Ball-Burmester point at inflection pole, Journal of Mechanisms, Vol. 2 (1967), S.. 45 - 59.
- [TeV67III] Vidusic, J. P.; Tesar, D.: Selections of four-bar mechanisms having required approximate straight-line outputs, part III, the Ball-Double-Burmester point-linkage, Journal of Mechanisms, Vol. 2 (1967), S.. 61 - 76.
- [TW66] Tesar, D.; Wunderlich, W.: Symmetrische Koppelkurven mit zwei Flachpunkten. ZAMM 46 (1966) Heft 8, S. 511-521.
- [To89] Tolle, P.: Interaktive Verwendung von Nomogrammen im CAD-System, dargestellt am Beispiel der Synthese von Geradführungen des Viergelenks. VDI-Bericht 736, S. 85-100, Düsseldorf 1989, VDI-Verlag.
- [T53] Tschebyscheff, P.L. : Zu der Theorie von Mechanismen, die unter dem Namen Parallelogramme bekannt sind (1853). Werke, Bd. I, St. Petersburg 1899, S. 111-143

- 
- [UK94] Ullah, I. Kota, S.: A more effective formulation of the Path-generation Mechanism Synthesis Problem.  
Proc. of the 23rd ASME Mechanisms Conference 1994, DE-Vol 70, S. 239ff.
- [VDI 2728] VDI 2728 Bl. 1. Lösung von Bewegungsaufgaben mit symmetrischen Koppelkurven; Übertragungsaufgaben.
- [VDI 2126] VDI 2126: Umwandlung von Schwing- in Schubbewegungen, 1959.
- [VDI 2127] VDI 2127: Getriebetechnische Grundlagen; Begriffsbestimmungen der Getriebe, 1959.
- [VDI 2136] VDI 2136 Konstruktion zentrischer Schubkurbeln für gegebene Geradführung, 1959.
- [VDI 2137] VDI 2137 Konstruktion zentrischer Kurbelschleifen mit Geradführung, 1959.
- [VDI 2725] VDI 2725 Blatt 1 u. 2: Getriebekennwerte; Kennwerte für den Entwurf und die Entwicklung von Getrieben, 1985.
- [VDI 2727] Blatt 1: Konstruktionskataloge; Lösung von Bewegungsaufgaben mit Getrieben.  
Blatt 2: Erzeugung hin- und hergehender Schubbewegungen; Antrieb gleichsinnig drehend.  
Blatt 3: Erzeugung gleichsinniger Drehbewegungen mit Rast(en) – Antrieb gleichsinnig drehend. 1991.
- [VDI 2728] Blatt 1: Lösung von Bewegungsaufgaben mit symmetrischen Koppelkurven - Übertragungsaufgaben, 1996.
- [Vo89] Volmer, J. (Hrsg.): Getriebetechnik - Leitfaden. Vieweg / VEB-Verlag 1989.
- [Vo79] Volmer, J. (Hrsg.): Getriebetechnik - Koppelgetriebe.  
VEB-Verlag Technik, Berlin 1989.
- [Wa75] Walsh, G.R.: Methods of Optimization, John Wiley & Sons, London 1975.
- [WMS90I] Wampler, C.; Morgan, A. P.; Sommese, A. J.: Numerical Continuation Methods for Solving Polynomial systems Arising in Kinematics.  
Journal of Mechanical Design 112 (1990), S. 59-68.
- [WMS90II] Wampler, C.; Morgan, A. P.; Sommese, A. J.: Complete Solution of the Nine-Point Path Synthesis Problem for Four-Bar Linkages.  
ASME Mechanism Synthesis and Analysis , DE 25 (1990), S. 361-368.
- [We85] Wehnes, H.: Strukturierte Programmierung mit FORTRAN 77.  
Carl Hanser Verlag, München 1985.

- 
- [Wo60] Wolford, J. C.: An analytical method for locating the Burmester points for five infinitesimally separated positions of the coupler plane of a four-bar mechanism. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 82, Series E, 1960, S. 182 - 187.
- [Wo94] Wolfram, S.: *Mathematica - Ein System für Mathematik auf dem Computer*. Addison-Wesley, Deutschland 1994.
- [We91] Wetterling, W. , Application of Chebyshev Approximation to Curve Fitting. *ZAMM* 71 (1991), S. 291-292.
- [Wu56] Wunderlich, W. : Zur angenäherten Geradführung durch symmetrische Gelenkvierecke. *ZaMM* 36 (1956) Heft 3/4, S. 103-110.

---

## **Lebenslauf**

Geburt 14.5.1963 in Hamburg  
Familienstand verheiratet, keine Kinder  
Konfession evangelisch  
Eltern Gunnar u. Ilse Gassmann, beide Lehrer

### **Ausbildung**

1969 - 1982 Besuch von Grundschule und Gymnasium  
1982 Abschluß: Abitur am Oberstufenzentrum Süderelbe  
1983 - 1991 Studium der Mathematik, Physik und Informatik in Hamburg  
1985 - 1986 Studentische Hilfskraft am mathematischen Seminar der Universität Hamburg  
1986 - 1989 Studentische Hilfskraft am CAD-Labor des Instituts für Konstruktions- und Fertigungstechnik der Universität der Bundeswehr Hamburg  
1991 Abschluß: Diplom-Mathematiker  
1991 - 1995 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Konstruktions- und Fertigungstechnik der Universität der Bundeswehr Hamburg  
(Leiter Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Funk)

### **Berufstätigkeit**

1989 - 1993 freier Mitarbeiter der CADEC GmbH Engineering Consultants, Trittau  
Softwareentwicklung im Bereich CAD und Getriebetechnik  
1996 - 2000 Softwareentwickler bei CIS Grafik und Bildverarbeitung GmbH, Viersen  
seit 01.03.2000 Softwareentwickler bei RAG Informatik